

Análisis de estabilidad en sistemas con retardo combinando la metodología en el dominio frecuencia y el enfoque de semidiscretización

Franco S. Gentile¹ Griselda R. Itovich² Jorge L. Moiola¹

¹Universidad Nacional del Sur y CONICET, Argentina ²Universidad Nacional de Río Negro, Argentina

Resumen

Se presenta una técnica híbrida para analizar estabilidad y bifurcaciones de puntos de equilibrio y órbitas periódicas en ecuaciones diferenciales con retardo. Por una parte, el denominado método en frecuencia permite detectar y representar soluciones periódicas. Por otra parte, el método de semidiscretización provee una aproximación finito-dimensional del operador de monodromía de una solución periódica y permite estudiar la estabilidad y las bifurcaciones de ciclos y también de puntos de equilibrio.

Motivación y objetivo

Estudiar estabilidad de soluciones y bifurcaciones en sistemas de la forma:

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau); \mu), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\dot{x} = dx/dt$, $\tau \in \mathbb{R}^+$ es el retardo, $\mu \in \mathbb{R}^p$ es un vector de parámetros y $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función no lineal suave.

Estabilidad de soluciones de equilibrio o periódicas

Se estudian las soluciones de

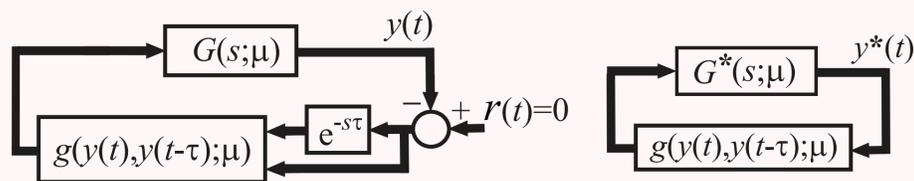
$$\dot{y} = D_0(t)y(t) + D_1(t)y(t - \tau), \quad (2)$$

donde $D_0(t) = \partial f / \partial x|_{x=x^*}$ y $D_1(t) = \partial f / \partial x(t - \tau)|_{x=x^*}$ tienen coeficientes periódicos o constantes, según sea x^* una solución periódica o de equilibrio.

Método en frecuencia

Se reescribe la ecuación como un subsistema lineal con una realimentación no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu, \\ y(t) &= -Cx(t), \quad y(t - \tau) = -Cx(t - \tau), \\ u(t) &= g(y(t), y(t - \tau); \mu) = g(Y; \mu). \end{aligned}$$



Existencia de solución periódica

Se debe resolver

$$\lambda(i\omega) = -1 + \xi_1(\omega)\theta^2 + \xi_2(\omega)\theta^4 + \dots \quad (3)$$

donde λ es una función característica en frecuencia tal que $|\lambda I - G^*(s)| = 0$, siendo $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y(t)} & \frac{\partial g}{\partial y(t-\tau)} \end{bmatrix}|_{Y=Y^*}$, y que verifica $\lambda(i\omega_0) = -1$, $\omega_0 > 0$ para cierto valor del parámetro $\mu = \mu_0$. El parámetro θ representa la amplitud de la órbita y ξ_i son números complejos que dependen de la no linealidad.

Método de semi discretización

Se toma una partición del intervalo $[0, T] = \cup_{i=0}^{p-1} [t_i, t_{i+1}]$, luego $h = \frac{T}{p}$ es el ancho de cada sub-intervalo I_i . Para cada I_i , las matrices en (2) se reemplazan por

$$A_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_0(s) ds, \quad B_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D_1(s) ds,$$

y se realiza una interpolación lineal de $y(t - \tau)$, resultando

$$\dot{y}(t) = A_i y(t) + B_i [\beta_{i,0}(t) y(t_{i-r}) + \beta_{i,1}(t) y(t_{i+1-r})], \quad (4)$$

siendo $r = \lceil \frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \rceil$ (parte entera). La Ec. (4) que se puede resolver analíticamente para cada $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, resultando el mapa

$$y_{i+1} = P_i y_i + R_{i,0} y_{i-r} + R_{i,1} y_{i+1-r}. \quad (5)$$

En (5), $P_i = e^{A_i h}$ y las matrices $R_{i,0}$ y $R_{i,1}$ tienen expresiones analíticas en función de A_i , B_i , h y τ . El mapa (5) se escribe en forma matricial como $z_{i+1} = G_i z_i$, con

$$z_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ \vdots \\ y_{i+1-r} \\ y_{i-r} \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & \cdots & R_{i,1} & R_{i,0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

e iterando el mapa p veces, se completa un período de la órbita, y el valor del estado resulta

$$z_p = \Phi z_0, \quad \Phi = G_{p-1} G_{p-2} \cdots G_0. \quad (7)$$

Φ es una matriz $(r+n) \times (r+n)$ que es una aproximación finito-dimensional del operador de monodromía de (2).

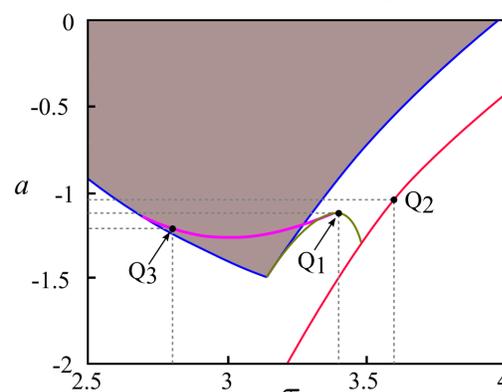
Procedimiento para la detección de bifurcaciones de ciclos

- 1 Se toma un valor μ_0 del vector de parámetros cercano a un punto de Hopf.
- 2 Se construye una aproximación de la órbita usando el MF.
- 3 Con esta aproximación, se evalúan las matrices D_0 y D_1 en (2).
- 4 Se calculan los coeficientes en (4) y (5) y se evalúa la matriz Φ en (7).
- 5 Se obtienen los multiplicadores de Floquet de la órbita.
- 6 Si todos los multiplicadores están dentro del círculo unitario, se toma $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ variando una componente del vector y se vuelve al paso 1. Si un multiplicador no trivial está sobre el círculo unitario, se ha detectado una bifurcación.

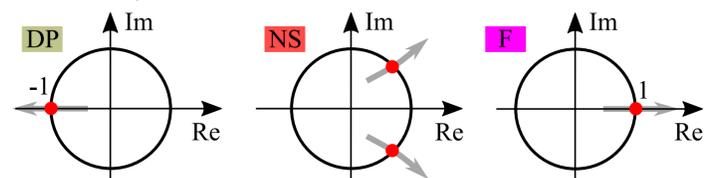
Ejemplo: oscilador con control con retardo

Se considera el sistema

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \frac{5}{2}x = ax(t - \tau) + bx^2(t - \tau), \quad (8)$$



Región de estabilidad del equilibrio trivial y curvas de bifurcaciones de Hopf (azul), doble período (marrón), fold (fucsia) y Neimark-Sacker (rojo). Los puntos Q_1 , Q_2 y Q_3 que corresponden a bifurcaciones de ciclos se determinan con el método híbrido.



Comparación entre el método híbrido y DDE-Biftool

Bifurcación	Método	a crítico	Mult. trivial	Amplitud
Doble período Q1	MF orden 2 y SM	-1.1130	0.9969	1.0375
	MF orden 4 y SM	-1.1206	0.9999	1.0337
	DDE-Biftool	-1.1235	1.0000	1.0549
Neimark-Sacker Q2	MF orden 2 y SM	-0.9830	0.9867	1.5324
	MF orden 4 y SM	-1.0330	1.0085	1.5405
	DDE-Biftool	-1.0352	1.0000	1.5430
Fold Q3	MF orden 4 y SM	-1.2226	0.9980	0.6386
	DDE-Biftool	-1.2211	1.0000	0.6459

Referencias

- [1] F. S. Gentile, J. L. Moiola and G. R. Chen, Frequency-Domain Approach to Hopf Bifurcation Analysis: Continuous Time-delay Systems. World Scientific, Singapore, 2019.
- [2] T. Insperger and G. Stépán, Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications. Springer Science+Business Media, Applied Mathematical Sciences Vol. 178, 2011.
- [3] K. Engelborghs, T. Luzyanina and D. Roose, "Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL," *ACM Trans. on Math. Software*, Vol. 28 No. 1, pp. 1-21, 2002.

Agradecimientos: Se agradece a los proyectos UNRN (PI 40/A1076), UNS (PGI 24/K087) y CONICET (PIP 11220200102076).

Contact: Franco S. Gentile. Departamento de Matemática, UNS. Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica, CONICET. fsgentile@gmail.com