Unidad 3: Vectores en el plano y en el espacio

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Esta unidad será nuestra aproximación a la geometría analítica, la cual resuelve problemas geométricos utilizando métodos algebraicos. Las coordenadas se representan por conjuntos numéricos y las figuras, por ecuaciones. Estudiaremos figuras simples, sus distancias, sus áreas, los puntos de intersección, los ángulos de inclinación, etc.

Las ideas principales surgieron entre el 1400 y el 1600, pero tuvieron una larga "prehistoria" y muchos embellecimientos posteriores.
* René Descartes (1596-1650)
* Pierre de Fermat (1601-1665)

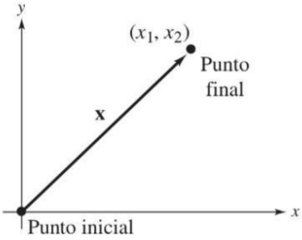
La notación sigue todavía hoy en plena evolución.

Los conceptos trabajados en esta unidad proporcionan un marco geométrico que facilita la comprensión de

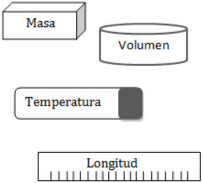
- sistemas de ecuaciones lineales
- espacios vectoriales con generalidad
- transformaciones lineales

Motivación física 1

Los vectores dan una herramienta que permite la representación e interpretación de muchas cantidades físicas de las cuales seguramente ya han tenido algún contacto:



Escalares:



El vector surge cuando a la magnitud se asocia una intensidad, una dirección (la recta que lo contiene), y un sentido (por eso un extremo es una flecha).

Motivación física 2

Gauss's law for electric fields

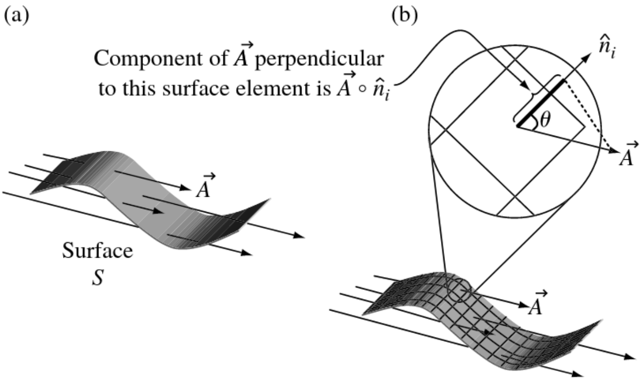


Figure 1.7 Component of $\vec{A}$ perpendicular to surface.

Vectores, vectores equivalentes

Cuando se pueda graficar: segmento orientado o flecha representa un vector.

Las notaciones usuales para nombrar a un vector suelen ser:

- negritas, entonces $\mathbf{V}$ es un vector
- una pequeña flecha por encima: $\vec{u}$
- manuscrita: solemos usar una línea por encima, entonces $\bar{w}$ es un vector

si el punto inicial de un vector es el punto $\mathbf{A}$ y el final $\mathbf{B}$, se escribe $\overline{AB}$.

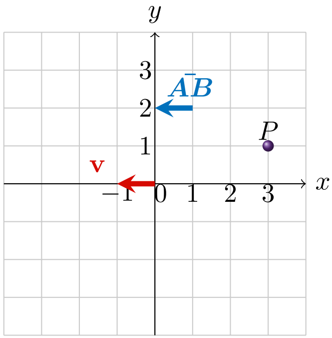
Vectores libres: desplazar un vector en forma paralela a si mismo, sin modificar su longitud ni sentido, lleva a otro que es equivalente, y no lo distinguiremos. Aquí nos remitimos a vectores de este tipo. En algunos contextos no se pueden usar, porque importa el punto de aplicación.

Vectores como pares o ternas de números

Cualquier vector se puede trasladar para que su punto inicial sea el origen de modo de establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y los pares (x, y) de números reales, y hablar directamente de $\mathbb{R}^2$, y no distinguiremos si es 2×1 y son columnas, o si es 1×2 y son filas. En los libros hay distintas notaciones.
Un vector $\bar{v} = (v_1, v_2)$ puede ser representado como un segmento recto dirigido desde el vector nulo $\bar{0} = (0, 0)$ hasta (v_1, v_2).

Ejemplo: consideremos $P = (3, 1)$.
$A = (1, 2)$;
$B = (0, 2)$;
$\overline{AB}$ empieza en A y termina en B.
El vector equivale al que inicia en el origen

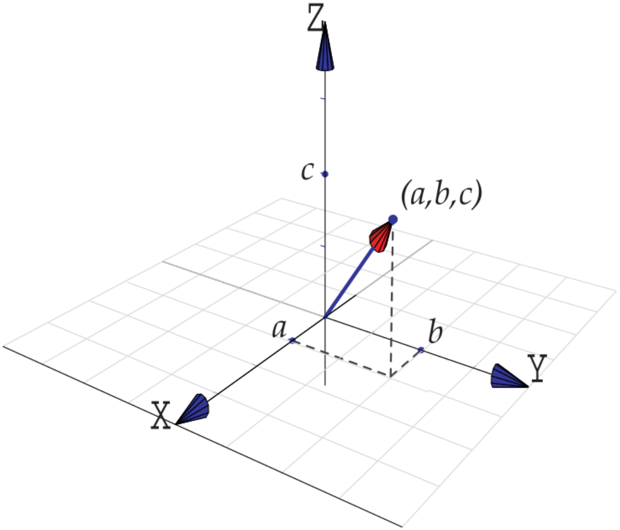
$\mathbf{v} = B - A = (0, 2) - (1, 2) \Rightarrow \mathbf{v} = (-1, 0)$



En general, si piensan en un vector, conviene pensarlo como una flecha, pero si nos encontramos con una colección de vectores, es conveniente pensarlos como puntos (el final de todas las flechas).

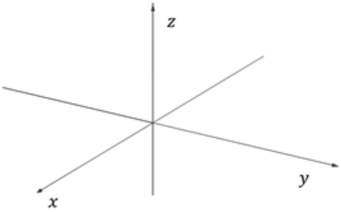
Ver video tomado de 3Blue1Brown, que se encuentra en el campus en la Unidad 3 si no funciona el link.

Graficar un vector en $\mathbb{R}^3$

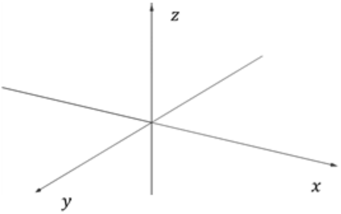


Graficar un vector en $\mathbb{R}^3$

Los ejes del gráfico anterior son perpendiculares entre sí, por lo que se habla de componentes cartesianas o rectangulares del vector. Lo usual es usar una terna derecha y si en algún caso no es así, especificarlo. Noten las flechas de crecimiento de los ejes, cada eje aumenta hacia $+\infty$.



Terna derecha



Terna izquierda

Igualdad entre vectores

Ya acordamos que trabajaremos con vectores son libres, más allá de eso, para trasladarlos al origen y que conserven su longitud, debemos definir cuándo dos vectores son iguales, y cómo se mide un vector. Lo diremos en $\mathbb{R}^3$ pero es análogo en $\mathbb{R}^2$. Sean dos vectores $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow u_x = v_x, \quad u_y = v_y, \quad u_z = v_z$$

La longitud de un vector se conoce como su norma y se anota con dos barras laterales. Como generalización del teorema de Pitágoras[1], vale que

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Así definida, la norma es un número que es positivo, a menos que el vector sea el nulo, $\vec{0}$, y entonces, su norma vale cero.

Dado $k \in \mathbb{R}$ se tiene $||k\,\vec{v}|| = |k|\;||\vec{v}||$.

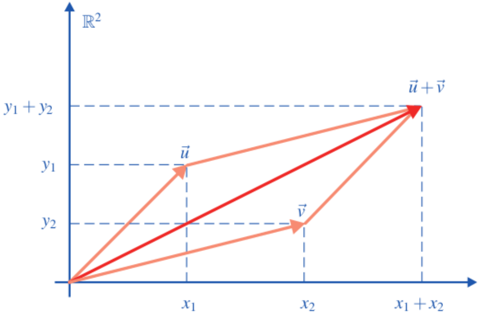
[1] Esta forma de medir vectores es lo que hace al espacio Euclídeo.

Operaciones y nociones básicas: adición o suma

Para sumar los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2), sumamos los componentes correspondientes de cada vector:

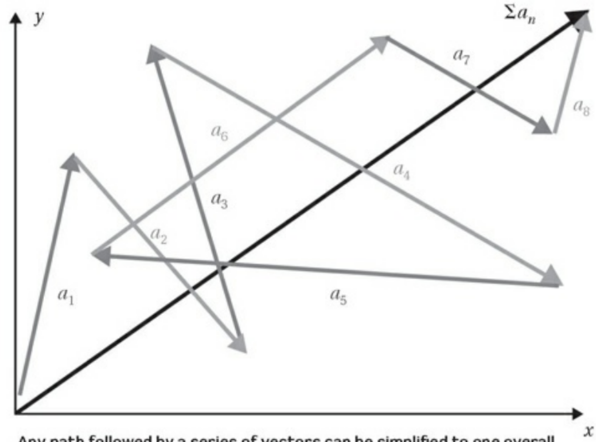
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo concreto: la suma de (2,4) y (1,5) es (2+1,4+5), que es (3,9). También hay una manera gráfica de sumar vectores, y las dos maneras siempre darán por resultado el mismo vector.



La suma de dos vectores en el plano es la diagonal del paralelogramo que se genera a partir de esos vectores.

Más en general, una sumatoria

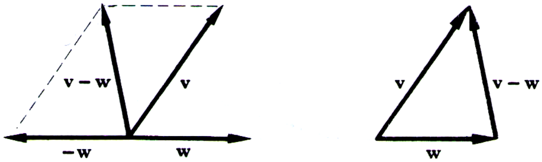


Any path followed by a series of vectors can be simplified to one overall vector with a single direction and magnitude, represented by Σ, the Greek letter sigma.

Operaciones y nociones básicas, mas visualizable en $\mathbb{R}^2$

El producto por el escalar (-1) que invierte el sentido a un vector (mantiene su dirección), habilita a restar vectores:

Definición. Si $\mathbf{v}$ es un vector y k es el número real (escalar), entonces el *producto* $k\mathbf{v}$ se define como el vector cuya longitud es $|k|$ multiplicado por la longitud de $\mathbf{v}$ y cuya dirección es la misma que la de $\mathbf{v}$, si $k > 0$, y opuesta a la de $\mathbf{v}$, si $k < 0$. Se define $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si $k = 0$ *o* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.



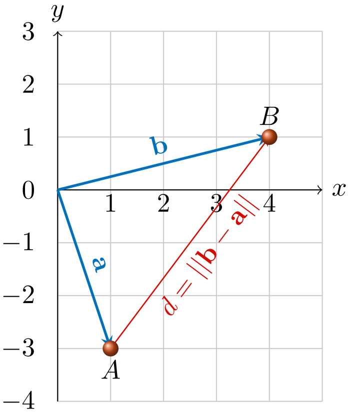
Esa es una forma gráfica, también se puede usar en $\mathbb{R}^3$. En términos de componentes:

$$\vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x, \quad v_y - w_y, \quad v_z - w_z)$$

Distancias

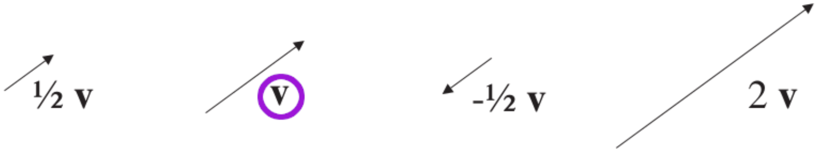
El concepto de norma de un vector y distancia están relacionados. Por ejemplo, dados dos puntos en el plano, $A = (1, -3); B = (4, 1)$, para calcular la distancia entre ellos, veamos que es la norma del vector que une esos puntos:

$$d = ||\mathbf{B} - \mathbf{A}|| = ||(4 - 1, 1 - (-3))|| = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow d = 5$$



Ejemplo: producto por un número o escalar

Al multiplicar por un número se "estira" la longitud del vector, como si se aplicara un factor de escala.



Donde el escalar es el número $\frac{1}{2}$, 1 (sin efecto), $\frac{-1}{2}$ y 2, respectivamente.
Vemos que si el escalar es negativo, cambia el sentido, pero no la dirección.

Operaciones y nociones básicas

El vector suma puede así obtenerse geométricamente mediante la conocida regla del paralelogramo, mientras que la multiplicación por un escalar α genera un vector con la misma dirección que el original, con el mismo sentido si $\alpha > 0$ (en la figura se ha elegido $\alpha > 1$) y el sentido opuesto si $\alpha < 0$.

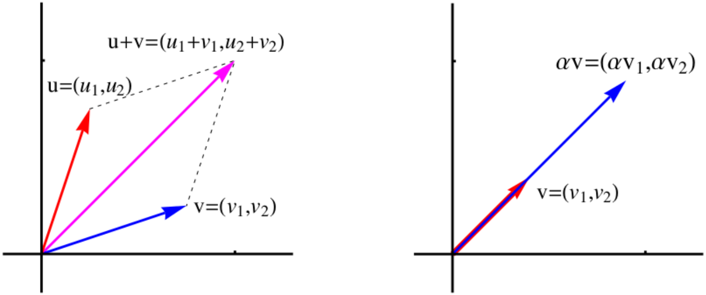


Figura 4.2: Suma de vectores y producto de un vector por un escalar

Propiedades de la suma y producto por escalares

Estas operaciones verifican además las siguientes propiedades:

1. La suma es conmutativa: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
2. La suma es asociativa: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
3. Existe el vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ tal que $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v} \ \forall \ \boldsymbol{v}$
4. Para todo $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ existe el vector opuesto $-\boldsymbol{v} = (-v_1, -v_2)$ tal que $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$
5. El producto por un escalar es distributivo respecto de la suma de vectores: $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$
6. El producto por un escalar es distributivo respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$
7. El producto por un escalar es asociativo: $\alpha\,(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$
8. El producto por 1 no modifica el vector: $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \ \forall \ \boldsymbol{v}$

Las mismas propiedades son satisfechas por el conjunto $\mathbb{R}^3$ de vectores en el espacio tri-dimensional, y en general $\mathbb{R}^n$.

Recordamos: el símbolo $\forall$ se lee "para todo".

Producto escalar o producto punto

El producto punto o escalar (porque el resultado es un escalar) entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cualquiera del plano o del espacio tridimensional se define

Definición

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{cases} ||\vec{v}||\,||\vec{w}||\cos\alpha, & \text{si } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{w} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{v} = \vec{0} \text{ ó } \vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$

Donde α es el ángulo entre los vectores.
Esto implica que $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$.
También, que dos vectores diferentes de cero son perpendiculares (ortogonales) si y sólo si su producto escalar se anula.

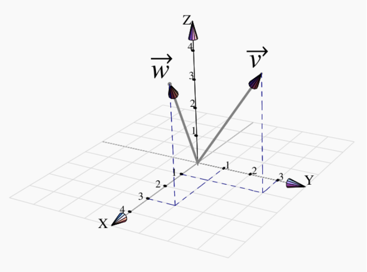
$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

Ángulo entre vectores

Dos vectores son paralelos (el ángulo entre ellos vale cero o 180 grados) si uno es mútiplo escalar del otro:

$$\vec{u} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} = k\,\vec{w} \text{ para algún valor de } k \in \mathbb{R}.$$

Es útil definir, tanto en $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$ que dados dos vectores $\vec{u} =$ y $\vec{v}$ diferentes de cero, el ángulo α entre ellos está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tienen el origen como punto inicial.



De esta forma $\boxed{0 \leq \alpha \leq \pi}$.

En el gráfico

$$\vec{u} = (1, 3, 4) \quad \vec{v} = (3, 1, 4) \quad \alpha =?$$

Producto escalar o producto punto

Conocidas las componentes de $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ para hallar el producto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x\, v_x + u_y\, v_y + u_z\, v_z$$

Donde queda claro que el resultado es un número (real) o escalar.
El producto escalar nos permite resolver el ángulo entre dos vectores, ninguno nulo

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}||}$$

Por ejemplo: $\mathbf{u} = (1, 3, 4) \quad \mathbf{v} = (3, 1, 4)$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3 + 3 + 16}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{22}{26} \Rightarrow \alpha \approx 0{,}56207 \approx 32{,}2042^\circ$$

Otras propiedades

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sea c un escalar. Entonces

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ — Conmutatividad

b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ — Distributividad

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Hay más en los libros.

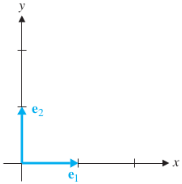
Vectores unitarios

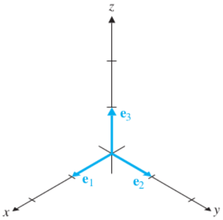
Si dado un vector no nulo, interesa su dirección pero no tanto su norma, una práctica común es dividir por su norma, lo que nos dará un nuevo vector de norma 1 o unitario. Por ejemplo:

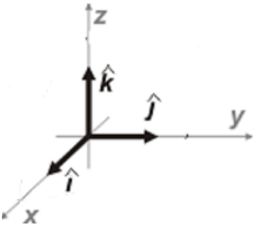
El vector $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Las direcciones de los ejes son vectores unitarios muy importantes. En libros (más bien matemáticos) se les llama versores, y sino, de todos modos se los distingue al escribirlos.







EN $\mathbb{R}^3$ notamos que

$$\breve{\boldsymbol{\imath}} = (1,0,0) \quad \breve{\boldsymbol{\jmath}} = (0,1,0) \quad \breve{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$$

Vectores unitarios

La utilidad de los versores recién definidos es que un vector puede escribirse de esta forma en $\mathbb{R}^2$

$$\bar{v} = (v_1, v_2) = v_1\, \breve{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}} + v_2\, \breve{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{2}}$$

O en $\mathbb{R}^3$

$$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\, \breve{\boldsymbol{\imath}} + u_y\, \breve{\boldsymbol{\jmath}} + u_z\, \breve{\boldsymbol{k}}$$

Y es un primer ejemplo de *descomposición* de un vector en otros de distintas direcciones que dan el original una vez sumados. Este es un ejemplo particular de considerar un vector como combinación lineal de otros.

Veamos si se entendió

Elegir la respuesta correcta

V) $\mathbf{j} - (4\mathbf{k} - 3\mathbf{i}) =$ ________.

a) $(1, -4, -3)$ *b)* $(1, -4, 3)$

c) $(-3, 1, -4)$ *d)* $(3, 1, -4)$

VI) $(\mathbf{i} + 3\mathbf{k} - \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{k} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{i}) =$ ________.

a) $2 + 4 + 3 = 9$ *b)* $(1 + 3 - 1)(1 - 4 + 2) = -3$

c) $1 + 12 - 2 = -13$ *d)* $2 - 4 - 3 = -5$

VII) El vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{i} + 3\mathbf{k} - \mathbf{j}$ es ____________.

a) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ *b)* $\frac{1}{5}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

c) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$ *d)* $(1,-1,3)/\sqrt{11}$

Otro ejemplo

Para entender por qué $\breve{\boldsymbol{i}}$, $\breve{\boldsymbol{j}}$, $\breve{\boldsymbol{k}}$ simplifican cuentas.

Dados $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$ en R^3, encuentre escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

Otro ejemplo

Para entender por qué $\breve{\boldsymbol{i}}$, $\breve{\boldsymbol{j}}$, $\breve{\boldsymbol{k}}$ simplifican cuentas.

Dados $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$ en R^3, encuentre escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

SOLUCIÓN

Escriba

$$\begin{aligned} \overbrace{(-1, -2, -2)}^{\mathbf{x}} &= a\overbrace{(0, 1, 4)}^{\mathbf{u}} + b\overbrace{(-1, 1, 2)}^{\mathbf{v}} + c\overbrace{(3, 1, 2)}^{\mathbf{w}} \\ &= (-b + 3c, a + b + c, 4a + 2b + 2c) \end{aligned}$$

e iguale las componentes correspondientes de modo que formen el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales a, b y c.

$$\begin{aligned} -b + 3c &= -1 && \text{Ecuación de la primera componente} \\ a + b + c &= -2 && \text{Ecuación de la segunda componente} \\ 4a + 2b + 2c &= -2 && \text{Ecuación de la tercera componente} \end{aligned}$$

Resuelva para a, b y c

Otro ejemplo

Para entender por qué $\breve{\boldsymbol{i}}$, $\breve{\boldsymbol{j}}$, $\breve{\boldsymbol{k}}$ simplifican cuentas.

Dados $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$ en R^3, encuentre escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

SOLUCIÓN

Escriba

$$\begin{aligned} \overbrace{(-1, -2, -2)}^{\mathbf{x}} &= a\overbrace{(0, 1, 4)}^{\mathbf{u}} + b\overbrace{(-1, 1, 2)}^{\mathbf{v}} + c\overbrace{(3, 1, 2)}^{\mathbf{w}} \\ &= (-b + 3c, a + b + c, 4a + 2b + 2c) \end{aligned}$$

e iguale las componentes correspondientes de modo que formen el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales a, b y c.

$$\begin{aligned} -b + 3c &= -1 && \text{Ecuación de la primera componente} \\ a + b + c &= -2 && \text{Ecuación de la segunda componente} \\ 4a + 2b + 2c &= -2 && \text{Ecuación de la tercera componente} \end{aligned}$$

Resuelva para a, b y c para obtener $a = 1$, $b = -2$ y $c = -1$.

Comentario: interpretando el resultado

Lo visto nos permite saber que $\mathbf{x}$ es una **combinación lineal** de los vectores dados: podríamos decir que se descompuso a $\mathbf{x}$ en las direcciones de los $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Miremos cómo son las columnas de la matriz ampliada del sistema que resolvimos.

Combinaciones lineales de vectores

Sea V un espacio vectorial. Si $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ son vectores de V y α_1, α_2 escalares, entonces la suma

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2$$

se denomina **combinación lineal** de $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, y es siempre un vector de V.
Análogamente, si $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ son n vectores de V y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares, la suma

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$$

se denomina **combinación lineal** de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ y es siempre un vector de V.

Retomaremos este concepto cuando hablemos de espacios en general.

A continuación haremos una descomposición con interpretación geométrica.

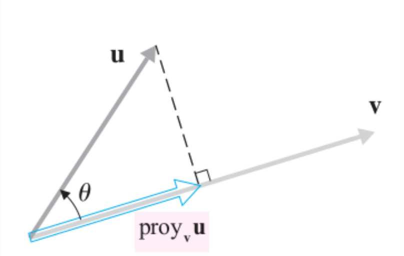
La proyección

Se busca descomponer un vector $\vec{u}$ como suma de dos que entre ellos sean perpendiculares. Uno de ellos tiene una dirección conocida, digamos $\vec{v}$, se introduce el concepto de proyección.

Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}$$

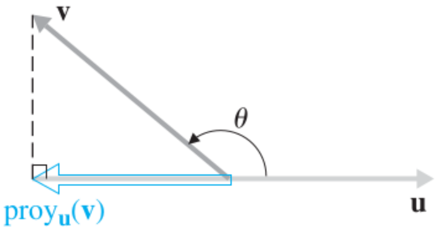
La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar.



Observe que $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario en la dirección de **v**.

La proyección de un vector sobre otro vector

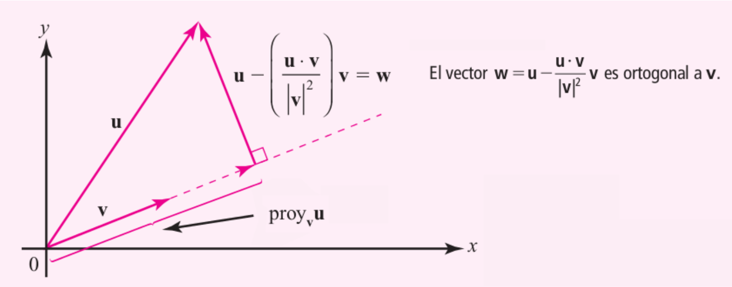
El término proyección proviene de la idea de proyectar una imagen sobre un muro (con un proyector, por ejemplo). Imagine un haz de luz con rayos mutuamente paralelos y perpendiculares a $\vec{u}$ que brillan sobre $\vec{v}$. La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es justo la sombra formada, o proyectada, por $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
La utilidad de esta definición será evidente en ciertos cálculos de distancias.
Mostramos la situación cuando el ángulo es mayor que $90°$



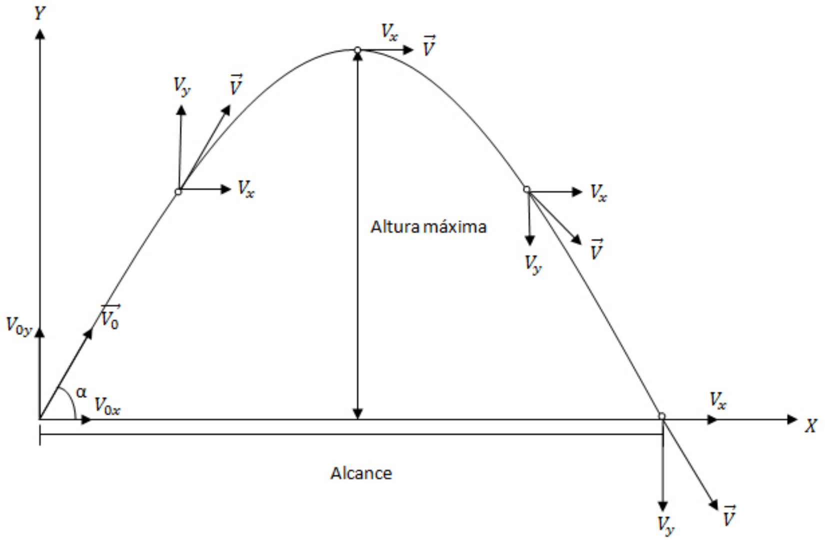
En este caso proyectan v sobre u.

Proyección y descomposición ortogonal van de la mano

$\mathbf{u}$ como suma de dos vectores perpendiculares, uno con dirección fija dada por el vector $\mathbf{v}$.



Ejemplo: dirección privilegiada

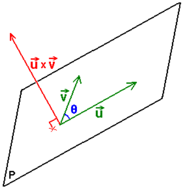


El producto punto vale en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\cdots$,$\mathbb{R}^n$

La siguiente es una operación en $\mathbb{R}^3$.

Producto vectorial o producto cruz

En $\mathbb{R}^3$ se plantea el construir un vector que sea perpendicular a dos vectores dados. Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que no sean cero, nos proponemos hallar un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{u} \perp \vec{w}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$. El producto vectorial justamente resuelve ese problema.



$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}}$$

Otra notación bastante difundida del producto vectorial es $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$

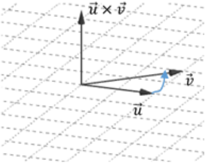
La norma del nuevo vector es

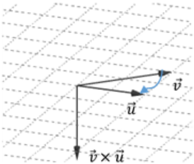
$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \sin \theta$$

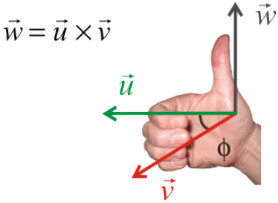
siendo α el ángulo comprendido entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Notar: el producto vectorial de dos vectores (que no sean cero) se anula si y sólo si son paralelos, pues $\sin \theta = 0$.

Producto vectorial: sentido del vector resultado

Se define $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para obtener el vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyo su sentido lo brinda la regla de la mano derecha:
si con la mano derecha se recorre el menor ángulo posible desde $\vec{u}$ (vector que aparece primero) hacia $\vec{v}$ (segundo vector en la operación), el pulgar indica el sentido de $\vec{w}$. De esta redacción (y probando!) notarán que es entonces una operación que **no es conmutativa**.







$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

Producto vectorial a partir de las componentes cartesianas

Conocidas las componentes de $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ para hallar las de $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ se usa un determinante "simbólico" ya que se debe desarrollar por primera fila. La fila 1 contiene a los versores de $\mathbb{R}^3$, la dos al primer vector que multiplico y la tercera al último, en ese orden. Osea

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{\boldsymbol{\imath}} & \breve{\boldsymbol{\jmath}} & \breve{\boldsymbol{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \breve{\boldsymbol{\imath}} \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \breve{\boldsymbol{\jmath}} \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \breve{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

Reemplazando puede obtenerse una fórmula, pero es más fácil recordar lo que marcamos arriba en rojo.

Además, ya sabemos que el determinante cambia de signo al intercambiar dos filas, que en este caso serían las de los vectores, porque la primera está fija.

Propiedades

Terminamos esta parte con las propiedades principales de esta operación

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (**propiedad anticonmutativa para el producto vectorial**).

iii) $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (**propiedad distributiva para el producto vectorial**).

v) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (esto se llama **triple producto** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

vi) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$).

vii) Si $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

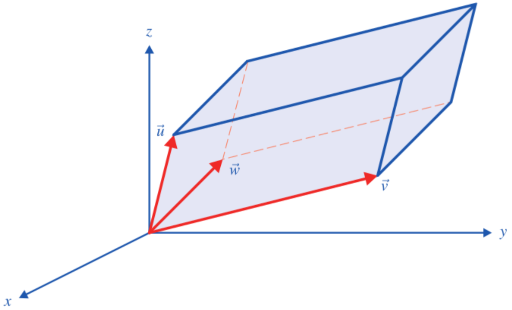
Notar que no tenemos una propiedad asociativa del producto cruz.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Apéndice

$||\vec{a} \times \vec{b}||$ es el área del paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$ es el volumen del paralelepípedo de lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el valor absoluto del determinante de la matriz que tiene como filas (o columnas) a estos vectores.

Apéndice: ejemplo

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

$\overrightarrow{u} = (3, -2, 5)$ $\overrightarrow{v} = (2, 2, -1)$ $\overrightarrow{w} = (-4, 3, 2)$

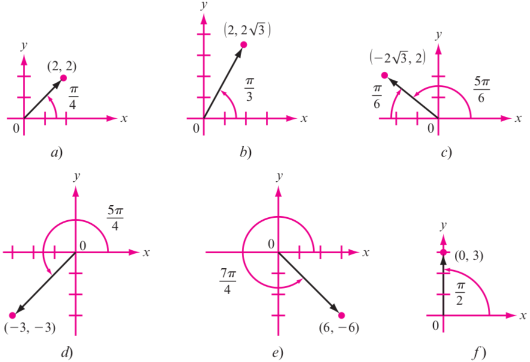
Calculamos el producto mixto

$$V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91\, u^3$$

La u^3 final está escrita para indicar el paso de unidades lineales a volumétricas.

Apéndice: Forma polar

Se define la dirección del vector $\vec{v}$ como el ángulo θ, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ si está dado en radianes.



En $\mathbb{R}^2$ la norma y el ángulo de un vector alcanzan para conocerlo, son una alternativa a las coordenadas cartesianas. En $\mathbb{R}^3$ la norma y dos ángulos son necesarios para conocer un vector, pero no entraremos en el detalle de las coordenadas esféricas.