Unidad 2: Determinantes

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Sistemas con la misma cantidad de ecuaciones que incógnitas

Como vimos A es inversible $\Leftrightarrow$ $AX = b$ tiene solución única, cualquiera sea $b \in \mathbb{R}^n$. dado que A^{-1} es única: Multiplicando a izquierda por A^{-1} a la ecuación matricial se tiene

$$\begin{aligned} AX &= b \\ \underbrace{A^{-1}A}_{I}X &= A^{-1}b \\ {\color{blue}X} &= {\color{blue}A^{-1}b} \end{aligned}$$

Ampliar con I y trabajar por eliminación de Gauss-Jordan, es una forma de hallar la inversa de una matriz, si es que existe. Pero ....

¿Hay alguna forma de **catalogar la matriz como inversible o no inversible** a priori?

Caso 1×1, con los números que el 0 no tiene inverso multiplicativo.

Caso 2 x 2

Sabemos que una matriz A es inversible sí y solo si A es equivalente por filas a $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Consideremos una matriz general

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

para empezar a reducirla, me fijo el valor de a_{11}
Si $a_{11} = 0$ me fijo si $a_{21} \neq 0$ y en caso afirmativo intercambio $F_1 \longleftrightarrow F_2$.
Si $a_{11} \neq 0$ entonces

$$A \xrightarrow{F_1 \to F_1/a_{11}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

En la matriz de 2×2, si sucede que $a_{11} = 0$ y $a_{21} = 0$, no se puede hallar la inversa de A.

Volvamos a la matriz original, y suponiendo $a_{11} \neq 0$ operemos así

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2\, a_{11}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}a_{11} & a_{22}a_{11} \end{pmatrix}$$

El paso siguiente, para conseguir un cero en la segunda fila, primer columna:

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1\, a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Para que se pueda continuar y conseguir un 1 en el elemento que pintamos de azul, debemos pedir que: $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{11} \neq 0$, entonces A tiene inversa. Es ese el criterio que buscabamos! y para una matriz de 2×2 nos define el determinante, que es un número dado por

Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\det(A) = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$

Ejemplos

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad \det \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 55 \end{pmatrix} = 0$$

Los casos que tienen alguna fila o columna con ceros, son matrices que no se pueden invertir.

Algunos más, y una notación que muchas veces se usa, con barras verticales para indicar determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1$$

Menores y cofactores

Para definir el determinante de una matriz cuadrada de mayor tamaño, se hacen dos definiciones que nos llevarán a finalmente calcular solo los determinantes de 2×2 que ya vimos.

Menor, M_{ij}

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz, el menor del elemento a_{ij} es el determinante de la submatriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al suprimir el renglón i y la columna j de A.

Cofactor

El cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo, sin números

Menor de a_{21}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Suprima el renglón 2 y la columna 1

Cofactor de a_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$$

Menor de a_{22}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Suprima el renglón 2 y la columna 2

Cofactor de a_{22}

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$$

Ejemplo, con números

Determine todos los menores y los cofactores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar el menor M_{11}, suprima el primer renglón y la primera columna de A y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 0(2) = -1$$

Verifique que los menores son

$$\begin{aligned} M_{11} &= -1 & M_{12} &= -5 & M_{13} &= 4 \\ M_{21} &= 2 & M_{22} &= -4 & M_{23} &= -8 \\ M_{31} &= 5 & M_{32} &= -3 & M_{33} &= -6. \end{aligned}$$

los cofactores,

$$\begin{aligned} C_{11} &= -1 & C_{12} &= 5 & C_{13} &= 4 \\ C_{21} &= -2 & C_{22} &= -4 & C_{23} &= 8 \\ C_{31} &= 5 & C_{32} &= 3 & C_{33} &= -6 \end{aligned}$$

Alternativamente, para el signo resultante de $(-1)^{i+j}$ puede recordarse esta regla sencilla, y ampliarla hacia la derecha y hacia abajo, al tamaño necesario. El resultado de $+1$ y -1 se alterna así

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriz de 4×4

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Matriz de $n \times n$

Desarrollo por fila del determinante

Definición práctica

El determinante de una matriz cuadrada es **la suma de los elementos de una fila, multiplicados por sus respectivos cofactores**.

Vayamos a un ejemplo con los valores que ya teníamos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{lll} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{array}$$

Desarrollando por la fila 1, se tiene

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 0(-1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 14$$

por la fila 2

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} = 3(-2) + (-1)(-4) + 2 \cdot 8 = 14$$

o por F_3

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 1(-6) = 14$$

Por lo visto, la fila puede elegirse libremente! Antes de pasar a otras propiedades útiles, analicemos el mismo caso pero desarrollando (o expandiendo) por columna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \begin{matrix} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{matrix}$$

por la columna 1, se tiene

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} = 0(-1) + 3(-2) + 4 \cdot 5 = 14$$

por la columna 2

$$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = 2 \cdot 5 + (-1)(-4) + 0 \cdot 3 = 14$$

o por la columna 3

$$\det(A) = |A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 1(-6) = 14$$

A lo largo de este curso, les pedimos indicar la fila o columna por la cual se haga el desarrollo.

Sensación vs. algoritmo

"No hay casi ninguna teoría más elemental que el álgebra lineal, a pesar de que generaciones de profesores y escritores de libros de texto han oscurecido su simplicidad mediante absurdos cálculos." Jean Dieudonne

formula El determinante de una matriz cuadrada $n \times n$ se define mediante la siguiente fórmula recursiva (*regla de Laplace*):

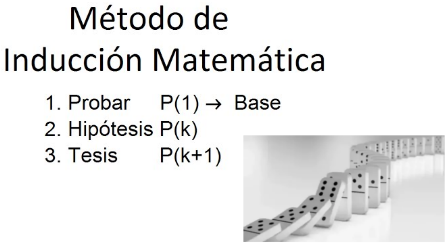
$$\det(\mathrm{A}) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij}, & \text{para } n > 1,\ \forall i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

donde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{A}_{ij})$ y A_{ij} es la matriz obtenida eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A. (El resultado es independiente del índice de la fila i.)

Generalidad del desarrollo

Una definición que hace uso del caso para $n-1$ para obtener el n, siempre que se haya probado para el caso inicial $(n=1)$, se dice que es inductiva. Esta es una herramienta poderosa del álgebra, que permite generalizar resultados a todos los valores naturales.

Es aplicable a los determinantes, para demostrar que el desarrollo por cofactores funciona independientemente del tamaño de la matriz cuadrada.



Un objetivo del curso es que las/os estudiantes logren vislumbrar la existencia de demostraciones más detalladas como trasfondo de las herramientas que se le presentan; esto es, tener un primer acercamiento a esta rama de la matemática formal y abstracta.

Se puede demostrar – teorema

Resultado importante

El determinante de una matriz puede calcularse utilizando los cofactores de cualquier fila o cualquier columna. *Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)*.

$$\boxed{\det(A) = \det\left(A^T\right).}$$

Mostraremos otras de las propiedades que son útiles para simplificar el cálculo de determinantes. En todos los casos, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Si una fila o columna de A posee todos sus elementos nulos, $\det(A) = 0$.

Ejemplo 4x4

Consideremos esta matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la tercer columna $\det(M) = 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 1 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43} = C_{33}$
Hay un solo cofactor de tamaño 3×3 que calcular,

$$\begin{aligned} C_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(luego, por columna 1)} \\ &= 2.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que $C_{33} = -14 + 6 = -8 \neq 0 \Rightarrow \det(M) = -8 \Rightarrow M$ es inversible.
Conclusión: La fila o columna que contiene más ceros suele ser la mejor opción para calcular un determinante.

Matrices triangulares

Matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Si A es una matriz triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puede determinarse por la expansión del tercer renglón para obtener

$$|A| = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

Operaciones elementales y determinante

- Si se intercambian dos filas de la matriz A, el determinante cambia de signo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Ejemplo: $$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = ? = 11$$

Operaciones elementales y determinante

- Si se intercambian dos filas de la matriz A, el determinante cambia de signo.

Consecuencia: inventarse un ejemplo!

Si una matriz A tiene dos filas iguales $\implies \det(A) = 0$.

Si una matriz A tiene dos columnas iguales $\implies \det(A) = 0$.

- Si una matriz A' resulta de multiplicar todos los elementos de **una fila (o columna)** de una matriz A por un número k, su determinante resulta multiplicado por ese número: $\det(A') = k \cdot \det(A)$.

Ejemplo:
$$\det\begin{pmatrix} 5 & 10 & -20 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-50)$$

Otro ejemplo, trabajo columna 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -x & -3 \\ 3 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix}$$

En consecuencia:

Si multiplicamos todos los elementos de una matriz de $n \times n$, por una constante k, entonces $\det(k.A) = k^n \det(A)$

$$\det\left(2\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\right) = 2^3\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

- Si una matriz A' resulta de sumar a una fila de A un múltiplo de otra fila, el determinante no varía: $\det(A') = \det(A)$.

Ejemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \quad \det(A') = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 = \det(A)$$

en este caso la matriz A' se obtiene de $F_2 \to F_2 - 2\,F_1$ sobre A, osea, sumar -2 veces la primer fila de A a la segunda.

Ejemplo combinando propiedades para reducir la cantidad de cálculos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -9 \\ -5 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 12 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$F_2 \to F_2 - 3F_1 \;\text{ y }\; F_3 \to F_3 - 5F_1$$

Resumen

Propiedades de los determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

* Si toda entrada en una fila (o columna) de A es cero, entonces $\det A = 0$.
* Si una matriz B se forma intercambiando dos filas (o dos columnas) de A, entonces $\det B = -\det A$.
* Si una matriz B se forma multiplicando cada entrada en una fila (o columna) de A por un número real k, entonces $\det B = k \det A$.
* Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $\det A = 0$.
* Si una matriz B se forma sustituyendo cualquier fila (o columna) de A por la suma de esa fila (o columna) y k veces cualquier otra fila (o columna) de la misma A, entonces $\boxed{\det B = \det A.}$

Un link: video similar sobre estos temas.

Otra propiedad: determinante del producto

Sobre el producto entre matrices cuadradas: $\det(A\,B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Por lo que para potencias naturales:

$$\det(A^m) = (\det(A))^m$$

Se puede deducir que si A es inversible $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

Cuidado: a veces $A\,B$ es una matriz cuadrada pero A y B no lo son, entonces no se puede aplicar la propiedad de arriba.
Ejemplo:

Calculemos $A\,C$ la multiplicación entre $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego obtener $\det(A\,C)$.

Notar $\nexists \det(A)$ y $\nexists \det(C)$.

Retomamos los sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$

Si A es cuadrada:

- $\det(A) = 0$ implica que el sistema es, o bien incompatible o compatible indeterminado. No podemos saber si no se trabaja con b.
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ el sistema es compatible determinado, cualquiera sea b.

Por ejemplo: tomemos el sistema de ecuaciones lineales

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z & = 5 \\ 2x + 5y + 3z & = 3 \\ x + 8z & = 17 \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

como $\det(A) \neq 0$ podemos afirmar que el sistema es Compatible Determinado.

$\Rightarrow$ se puede calcular A^{-1}, y multiplicar por b para hallar X.

Comprobar que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y calcular X.

Número de operaciones

Del lado izquierdo se refiere a sin aplicar las propiedades que vimos.

	Expansión por cofactores		*Reducción a triangular*	
Orden n	*Sumas*	*Multiplicaciones*	*Sumas*	*Multiplicaciones*
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3,628,799	6,235,300	285	339

De hecho, el número de operaciones para la expansión por cofactores de una matriz de una matriz $n \times n$ es $n!$ Como $30! \approx 2.65 \times 10^{32}$, incluso una matriz relativamente pequeña de 30×30 puede requerir de más de 10^{32} operaciones. Si una computadora puede realizar un billón de operaciones por segundo, le tomaría más de un billón de años calcular el determinante de esta matriz aplicando expansión por cofactores. Sin embargo, la reducción de renglones sólo toma algunos segundos.

Una forma de expresar la matriz inversa

Si $\det(A) \neq 0$, entonces la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

donde C_{ij} es el cofactor del A_{ij}

Si le llamamos Matriz adjunta, $adj(A)$, a la matriz formada por los cofactores de los elementos de A, respetando posiciones, se tiene :

$$A^{-1} = \frac{(adj(A))^T}{\det(A)}$$

$$A^{-1} = \frac{(adj(A))^T}{\det(A)}$$

Por ejemplo, en 2×2 se obtiene $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En $\mathbb{R}^{3\times 3}$, para una matriz A que ya calculamos el determinante y obtuvimos todos los cofactores:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 14.$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Alguno de los coeficientes sin especificar

Supongamos que se tiene un sistema lineal con matriz cuadrada, donde alguno de los coeficientes es incógnita y nos interesa clasificar.

Plantear $\det(A) = 0$ aunque un elemento de A sea desconocido (digamos k) permite tener una ecuación de la cual despejar cuáles valores de k llevan a la situación donde **no hay única solución.**

En algunos casos, la dependencia del determinante con k puede ser no-lineal.

Ejemplo de 2×2

Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema es compatible. Se conoce la matriz ampliada $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$

Identificamos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, cuyo determinante es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 6$$

* $\det(A) = 0$, para que sea compatible (indeterminado) tenemos que trabajar con toda la matriz. Lo hacemos reemplazando el a que anula el determinante.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & b \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & b-2 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado si, además de $a = -6$ se tiene $b - 2 = 0$

* Compatible determinado: $\det(A) \neq 0$, osea $a \neq -6 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{-6\}$, con $b \in \mathbb{R}$ cualquier valor.

Ejemplo de 3×3

Queremos hallar k para que la solución del sistema sea única

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ (2k-2)x_1 + 2kx_2 + x_3 &= 0 \\ (k+2)x_1 + (k-3)x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2k-2 & 2k & 1 \\ k+2 & k-3 & 2 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos el determinante de A en función de k

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2k-2 & 2k & 1 \\ k+2 & k-3 & 2 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2k-2 & 2k & 1 \\ k-2 & k+1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2k-4 & 2k+2 & 0 \\ k-2 & k+1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2k-4)(k+1) - (k-2)(2k+2) = 2(k-2)(k+1) - (k-2)2(k+1) = 0$$

Se anula sin importar k, por lo que este caso no tiene chances de que la solución del sistema sea única. Por ser homogéneo, será compatible indeterminado para cualquier $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio del Anton, pag 100

Sea esta la matriz ampliada de un sistema lineal de ecuaciones $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right)$

Para qué valores de a y b

i) tiene solución única?
ii) tiene conjunto solución con un parámetro?
iii) tiene conjunto solución con dos parámetros?
iv) no tiene solución?

Ejercicio con algunos elementos del análisis matemático

Restringir x al dominio de la función y resolver esta descomposición en fracciones simples

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Para pensar, generalizando tamaño

En la Guia 1 vimos que $\mathbf{u} = (-2, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ y $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ son soluciones de este sistema

$$S = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿CÓMO ASEGURARNOS SIN RESOLVER, SI HAY O NO OTRAS SOLUCIONES? PODRÍAMOS CONOCER UNA NUEVA EN BASE A ESTAS DOS?

Llamando $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$; sabemos que $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$.

Por ejemplo, pensemos en el promedio de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que es $\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, \frac{-7}{2}\right)$
Para ver si es solución, multiplicamos por A

$$A\left(\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(A\mathbf{u} + A\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{b}) = \mathbf{b}$$

Verdadero o Falso

Si $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ diga si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. **Justifique.**

- $\mathbf{x_1}$ es solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}$ es una solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ es otra solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solamente 2 soluciones.