Unidad 1: Sistemas de ecuaciones lineales

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Comisión 1 – 2024

Identificar ecuaciones

Situación: dos expresiones (miembros) vinculadas por el signo igual.
Ej:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

Identidad: la igualdad se verifica *para todos* (símbolo $\forall$) los valores del conjunto de las variables.
Solemos llamar ecuación a una igualdad que se verifica para ciertos valores de las variables.
Sistema de ecuaciones, cuando son varias en simultáneo. Los valores que

satisfacen la o las ecuaciones forman el **conjunto solución** de un sistema de ecuaciones.

Sistema lineal

$$S: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 + \frac{3}{7}x_2 = -1 \end{cases}$$

Ecuaciones no lineales

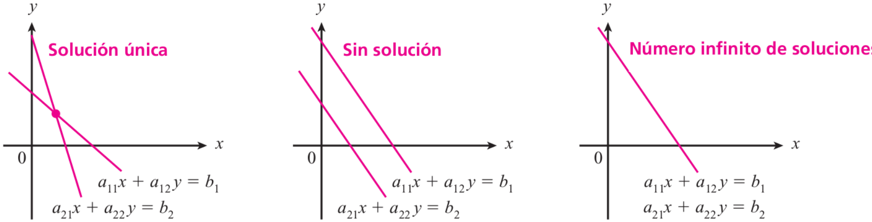
$$G: \begin{cases} x^2 + 4 = 3 \\ 1 = 2\,x\,y + y^2 \end{cases}$$

Aparecen potencias, multiplicación de incógnitas, funciones trascendentales

Dos ecuaciones con 2 incógnitas

$$(a)\begin{cases} -4x+y-5=1 \\ 2y+3y=1 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} -3x_2+x_1=2 \\ 6x_2=2x_1 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} 2x-y=1 \\ -3y+6x=3 \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^2$, ecuación lineal $\Longleftrightarrow$ la gráfica es una recta.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

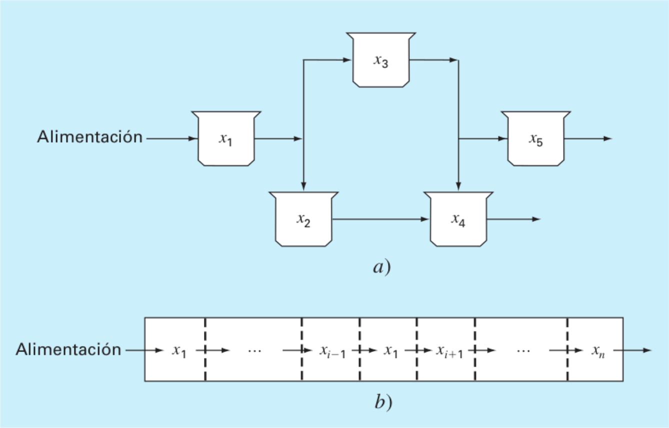
b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Notar: se trabaja en forma ordenada.
Los coeficientes tienen dos subindices: el primero dice el número de ecuación, el segundo indica la incógnita.

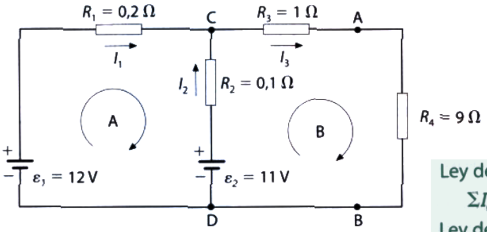
Naturaleza

Las leyes de conservación de ciertas cantidades (por ej. masa, energía) llevan a ecuaciones de balance o de continuidad que describen el comportamiento de un sistema. A veces, se modeliza en forma lineal.



Hay muchos ejemplos en la bibliografía provista.

Ejemplo con circuitos



Ley de nudos:

$$\Sigma I_{entrantes} = \Sigma I_{salientes}$$

Ley de mallas:

$$\Sigma \varepsilon = \Sigma \Delta V_R$$

- **Primera ley de Kirchhoff:** $I_1 + I_2 = I_3$
- **Segunda ley de Kirchhoff** (suponemos que R_{i1} y R_{i2} son nulas):
  - Malla A: $\varepsilon_1 - I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 - \varepsilon_2 = 0$
  - Malla B: $\varepsilon_2 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 - I_3 \cdot R_4 = 0$

Al sustituir los valores en estas expresiones, se obtiene:

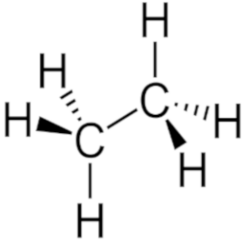
- Nudo C: $I_1 + I_2 = I_3$
- Malla A: $12 - 0{,}2 \cdot I_1 + 0{,}1 \cdot I_2 - 11 = 0$
- Malla B: $11 - 0{,}1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 - 9 \cdot I_3 = 0$

Si estamos construyendo un circuito, podría ser que no se conozca un componente, pero existan limitaciones a las que atenerse.

Ejemplo de química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$.

ETANO
en condiciones normales se encuentra como un gas que es inflamable y al desplazar al oxígeno puede ser asfixiante.
Son necesarias algunas precauciones adicionales cuando el etano se almacena como líquido criogénico.



Solución Buscamos los enteros positivos x, y, z y w para que la ecuación balanceada sea

$$x\, C_2H_6 + y\, O_2 \to z\, CO_2 + w\, H_2O$$

Como el número de átomos de cada elemento debe ser igual en ambos lados de la última ecuación, obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro variables:

carbono (C):	$2x = z$		$2x + 0y - z + 0w = 0$
hidrógeno (H):	$6x = 2w$	o	$6x + 0y + 0z - 2w = 0$
oxígeno (O):	$2y = 2z + w$		$0x + 2y - 2z - w = 0$

$$x\,C_2H_6 + y\,O_2 \to z\,CO_2 + w\,H_2O$$

carbono (C):	$2x = z$		$2x + 0y - z + 0w = 0$
hidrógeno (H):	$6x = 2w$	o	$6x + 0y + 0z - 2w = 0$
oxígeno (O):	$2y = 2z + w$		$0x + 2y - 2z - w = 0$

Puesto que el último sistema es homogéneo, debe ser consistente.

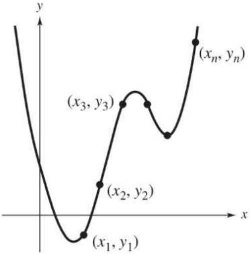
Realizando operaciones elementales entre filas, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{operaciones entre filas}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

y, por tanto, una solución del sistema es $x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{7}{6}\alpha$, $z = \frac{2}{3}\alpha$, $w = \alpha$. En este caso, α debe ser un entero positivo elegido de forma que x, y, z y w sean también enteros positivos. Para lograrlo, seleccionamos $\alpha = 6$. Esto da $x = 2$, $y = 7$, $z = 4$ y $w = 6$. Así, la ecuación balanceada es

$$\boxed{2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O}$$

Ejemplo sobre ajuste de datos



AJUSTE POLINOMIAL DE CURVAS

Suponga que n puntos en el plano xy

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

representan un conjunto de datos y se le pide encontrar una función polinomial de grado $n - 1$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

cuya gráfica pasa por los puntos dados. Este procedimiento se denomina **ajuste polinomial de curvas**. Si todas las coordenadas x de los puntos son distintas, entonces hay precisamente una función polinomial de grado $n - 1$ (o menor) que se ajusta a los n puntos, como se muestra en la figura 1.4.

Para determinar los n coeficientes de $p(x)$, sustituimos cada uno de los n puntos en la función polinomial para obtener n ecuaciones lineales en n variables $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n
\end{aligned}$$

Ejemplo sobre ajuste de datos

Supongamos que se quiere obtener la ecuación de una recta $y = mx + b$ que contiene a los puntos $A = (1, 0)$, $B = (3, 2)$ y $C = (4, 1)$.
Las incógnitas serán la pendiente m y la ordenada al origen b.

$$\begin{cases} 0 = m\,1 + b \\ 2 = m\,3 + b \\ 1 = m\,4 + b \end{cases}$$

Basta con graficar los puntos para ver que no hay una única recta que los contenga, por lo que el sistema de ecuaciones lineales es incompatible.

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Según el conjunto solución se tiene

$$\begin{aligned} \text{Solución única} \quad &\equiv \quad \text{Sistema compatible determinado} \\ \text{Infinitas soluciones} \quad &\equiv \quad \text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{Sin solución} \quad &\equiv \quad \text{Sistema incompatible} \end{aligned}$$

Un elemento del conjunto solución, suele llamarse una solución particular.

Siempre es recomendable VERIFICAR el conjunto solución hallado.

Si son infinitas las soluciones, probar con soluciones particulares o trabajar con parámetros (ej. más adelante).

En general

Par una ecuación lineal, con n incógnitas

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = b$$

donde los a_i serán números que llamamos coeficientes, y b es el término constante. Si hay varias ecuaciones, forman un sistema, indicamos así

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

En este caso el sistema tiene m ecuaciones con n incógnitas.
Cada coeficiente es un número real $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i$, $\forall j$.

Sistemas equivalentes

Cuando tomamos una ecuación y operamos miembro a miembro (hacer lo mismo a ambos lados del igual), salvo que multipliquemos por cero, mantenemos la igualdad, las soluciones son las mismas.

Sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto solución.

• El 'padre del álgebra', Al-Juarismi, es un héroe nacional en Uzbekistán

Sistema de ecuaciones equivalente

Para motivar un **método de resolución** eficiente para sistemas de cualquier tamaño, notemos que es posible trabajar sobre las ecuaciones y obtener un sistema que tenga el mismo conjunto solución, pero sea más fácil de resolver.

- Multiplicar una ecuación por una constante (distinta a cero).
- Intercambiar el orden de dos ecuaciones.
- Sumar un múltiplo de una ecuación a otra.

Este tipo de *operaciones* sobre el sistema permite despejar sistemáticamente las incógnitas, como veremos.

Ejemplo: operar con las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 & \quad (1.2.5a)\\ x_2 + \ 2x_3 &= 4 & \quad (1.2.5b)\\ x_3 &= -3 & \quad (1.2.5c) \end{aligned}$$

Ahora se multiplica la ecuación (1.2.5*c*) por -1:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \quad x_3 &= 1 & \quad (1.2.6a)\\ x_2 + \ 2x_3 &= 4 & \quad (1.2.6b)\\ x_3 &= 3 & \quad (1.2.6c) \end{aligned}$$

Por último, se suma la ecuación (1.2.6*c*) a la ecuación (1.2.6*a*) y después se multiplica la ecuación (1.2.6*c*) por -2 y se suma a la ecuación (1.2.6*b*) para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1.2.1):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 4\\ x_2 \qquad &= -2\\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma $(4, -2, 3)$.

... esto se agiliza si evitamos escribir las incógnitas todas las veces: se organiza solo una vez para **guardar** el orden.

Forma matricial del sistema $AX = b$

Los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

permiten pasar facilmente a la forma matricial.

La matriz ampliada o aumentada del sistema de ecuaciones S tiene dos partes, aunque a veces la línea vertical puede no aparecer

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Importante.
Las incógnitas escritas en el mismo orden en cada ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$S:\begin{cases} 2x+4y+6z=18 \\ 4x+5y+6z=24 \\ y+3x-2z=4 \end{cases} \quad \text{pasa a forma matricial} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se colocaron los coeficientes de las incógnitas en una matriz de: tantas filas como número de ecuaciones y tantas columnas como número de incógnitas.
A las columnas X y b más adelante la llamaremos vectores.

Las matrices son arreglos rectangulares de números

De esa forma X y b son matrices columna, mientras que A es la matriz de coeficientes del sistema.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$X \in \mathbb{R}^{n}$
$b \in \mathbb{R}^{m}$

El sistema queda, en su **forma matricial** $A\,X = b$, y la matriz ampliada es $(A|b)$.

Estos tamaños permiten aplicar la operación de multiplicación de matrices.

Sistema	Matriz aumentada	Matriz de coeficientes
$\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5 \\ -x + 3y - z &= -3 \\ 2x \qquad - 4z &= 6 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Los valores en la columna b suelen llamarse términos constantes del sistema.

Las incógnitas coleccionadas en X guardan información vital para reconstruir el conjunto solución de S.

Sistema homogéneo

Cuando toda la columna b de términos constantes tiene ceros, el sistema de ecuaciones se dice *homogéneo*.

Dado un sistema de ecuaciones lineales cualquiera $(A|b)$ y podemos asociarle uno homogéneo, símbolicamente $(A|0)$.

Tienen interés dos propiedades:

- Todo sistema homogéneo es compatible: tiene al menos la solución llamada trivial, $x_i = 0, \forall i$.
- Cuando un sistema homogéneo tiene más incógnitas que ecuaciones, es compatible indeterminado.

Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Se opera sobre las filas de la matriz ampliada, para obtener una matriz equivalente por filas (corresponde a un sistema equivalente de ecuaciones, mismo conjunto solución, pero más simple de resolver).
Son 3 las operaciones elementales posibles, solo debemos adoptar alguna notación para que el proceso se pueda leer facilmente.

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \leftrightarrow R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".

Anton, es igual pero con letra F, por filas.

Según libro, el simbolo $\leftrightarrows$ y $\leftrightarrow$ indican lo mismo.
CONVENCIÓN: Fila del paso actual flecha(s) fila o filas del paso anterior

Para trabajar en clase

Operaciones elementales por renglón

identifique la o las operaciones elementales por renglón realizadas para obtener la nueva matriz equivalente por renglones.

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

a $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

b $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

c $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$

Respuesta:

a) $F_1 \to F_1 + 5F_2$

b) $F_2 \to F_2 + 3F_1$

c) $F_2 \leftrightarrow F_1$ y luego $F_3 \to F_3 + 4F_1$
o sino,
$F_3 \to F_3 + 4F_2$ y luego $F_2 \leftrightarrow F_1$

Ejemplo:

$$S : \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ y + 3x - 2z = 4 \end{cases}$$ pasa a forma matricial $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Guardaremos la forma matricial pero vamos a avanzar sobre la atriz ampliada.

Ejemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{blue}{1} & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \quad F_1 \to F_1/2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \quad F_2 \to F_2 - 4\,F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \quad F_3 \to F_3 - 3\,F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \color{blue}{1} & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \quad F_2 \to F_2/(-3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right] \quad F_1 \to F_1 - 2\,F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \quad F_3 \to F_3 + 5\,F_2$$

Ejemplo: continúa, a la derecha lo nuevo

2	4	6	18
4	5	6	24
3	1	-2	4
1	2	3	9
4	5	6	24
3	1	-2	4
1	2	3	9
0	-3	-6	-12
3	1	-2	4
1	2	3	9
0	-3	-6	-12
0	-5	-11	-23
1	2	3	9
0	1	2	4
0	-5	-11	-23
1	0	-1	1
0	1	2	4
0	-5	-11	-23
1	0	-1	1
0	1	2	4
0	0	-1	-3

1	0	-1	1	
0	1	2	4	
0	0	1	3	$F_3 \to (-1)F_3$
1	0	0	4	$F_1 \to F_1 + F_3$
0	1	2	4	
0	0	1	3	
1	0	0	4	
0	1	0	-2	$F_2 \to F_2 - 2\,F_3$
0	0	1	3	

Notar que las incógnitas son las originales.

El sistema de ecuaciones lineales $S : \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 18 \\ 4x + 5y + 6z = 24 \\ y + 3x - 2z = 4 \end{cases}$

es equivalente al que tiene matriz ampliada $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

Las incógnitas son las mismas, entonces la solución **única** es $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.
El sistema es compatible determinado.

Reemplacemos los valores de la solución, $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ en S para verificar que hicimos bien las cuentas.

Ejemplo: compatible indeterminado

Ejemplo
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30 \end{cases}$$

Su matriz ampliada
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

La última fila no provee información sobre las incógnitas.
Cuidado, no mutilar la matriz

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2 y x_3, y por lo tanto existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige a x_3 como parámetro y se despejan a x_1 y x_2 en términos de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución $(1, 4, 0)$. Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$, y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

Otro compatible indeterminado

Considere las ecuaciones que resultan de esta matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}\right)$$

queda un sistema en el que hace falta sustituir hacia atrás $x_6 = 1/3$. Se puede

asignar valores arbitrarios a las variables libres o no principales que pasan a ser parámetros: $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$

Solución: $\begin{cases} x_1 = -3r-4s-2t \\ x_2 = r \\ x_3 = 2s \\ x_4 = s \\ x_5 = t \\ x_6 = 1/3 \\ \quad r\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R} \end{cases}$

Si los parámetros pueden tomar cualquier valor, completamos la solución con ese último renglón.

$r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

Ejemplo: incompatible

Supongamos que estamos trabajando sobre una matriz ampliada y llegamos a esta situación*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora es vital la información de la última fila, provee una ecuación

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 1$$

que no tiene solución. Para cualquier terna de valores, del lado izquierdo se obtiene cero.

$$\boxed{0 = 1 \text{ es un absurdo.}}$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es incompatible. Su conjunto solución está vacío o es simbolicamente $\varnothing$

Gauss–Jordan

Cuando hablamos de un sistema "*más simple de resolver*" hay cierta vaguedad. Esta se elimina cuando definimos la forma reducida y escalonada de una matriz.


Sentido de la diagonal principal en una matriz.

El método de Gauss–Jordan, o eliminación de Gauss–Jordan, llega justamente a esa instancia, donde quedarán 1 (unos) en los coeficientes de incógnitas despejables, a los que se suele llamar "uno principal" de la fila.

Las otras incógnitas (en sistema comp. indeterminado) son variables libres y finalmente serán parámetros del conjunto solución.

Matriz $\xrightarrow{\textbf{operaciones por fila}}$ **equivalente escalonada y reducida.**

Matriz reducida y escalonada

Una matriz se encuentra en forma escalonada y reducida en las filas si cumple

Condiciones:

- Si una fila posee algún coeficiente distinto de 0, el primero de estos coeficientes debe ser un 1 (al recorrerla de izquierda a derecha) al que se llama "1 principal".
- El 1 principal de cualquier fila debe estar a la derecha del 1 principal de las filas anteriores (es decir, las que están por encima de esa fila).
- Las filas que son nulas aparecen al final de la matriz (al recorrerla de arriba hacia abajo).
- Cada columna que tenga un 1 principal, tiene ceros en las demás posiciones.

Si una matriz tiene sólo las primeras 3 propiedades se dice que está en la forma escalonada.

Dada una matriz, su equivalente escalonada y reducida en las filas es única.

Ejemplos: estas matrices son reducidas y escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Llamamos **rango** de la matriz al número de filas no nulas que tiene su equivalente matriz escalonada y reducida en las filas. Coincide con la cantidad de unos principales.

En los ejemplos: rango(A)=3; las matrices B, E, F, I tienen rango 2; mientras que rango$(D) = 0$.

Apéndice

La solución de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado es un conjunto infinito, que admite distintas parametrizaciones, ya que a un mismo conjunto lo puedo expresar de diferentes maneras (formalmente se habla de un lugar geométrico).

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$:
La recta L1: $\{y = 2x$, con $x \in \mathbb{R}\}$ es la misma que L2:$\{x = y/2$, con $y \in \mathbb{R}\}$

Matemáticamente la forma de probar que dos conjuntos son iguales es demostrar que se incluyen mutuamente.

`Hay una diferencia entre los métodos de Gauss (llega a matriz triangular y reemplaza hacia atrás) y el de Gauss-Jordan (llega a matriz reducida y escalonada). Preferiremos el último en este curso, pero en situaciones generales, es mejor guiarse por lo que se quiere responder (enunciado) y la necesidad, o no, de comparar resultados con otras personas.`