Unidad 1: Matrices

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Comisión 1 – 2024

Operaciones con matrices

Recordemos que los elementos de una matriz tienen dos índices, el primero indica número de fila, de arriba hacia abajo, el segundo indica columna, de izq. a derecha. Cuando decimos el tamaño, como $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se usa la misma idea, m aparece primero y es la cantidad de filas de A, y n su número de columnas. Todos los elementos son $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots m$, $j = 1, 2, \cdots n$.

Ejemplos

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2.

$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3.

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de 2×4.

Igualdad de matrices

Para que dos matrices sean iguales todos sus elementos deben ser iguales, lo que obliga a que se trate de matrices con el mismo tamaño.

EJEMPLO

Considere las cuatro matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B **no** son iguales, ya que tienen diferente tamaño. De manera similar, B y C tampoco lo son. Las matrices A y D son iguales si y sólo si $x = 3$.

Suma

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se puede obtener la suma $C = A + B$ donde $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ por lo que $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Como en definitiva se trabaja con los elementos (números reales), la operación cumple la propiedad asociativa, y que $A + B = B + A$. Un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que el neutro de la operación es una matriz llena de ceros $0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces $A + 0 = A$.

Por ej. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

- `La suma de matrices de diferente tamaño no está definida.`

Multiplicación escalar (por números)

Una matriz se puede multiplicar por un número, o escalar: $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces los elementos son todos multiplicados por ese mismo escalar.
Por ejemplo: si

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow 3A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 12 \end{smallmatrix}\right)$$

Un ejemplo que realiza una combinación

$$\text{Sea} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Calcule } 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}.$$

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma y producto por número (escalar)

Aplicaremos en las guías prácticas,

Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i) $A + 0 = A$

ii) $0A = 0$

iii) $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**

iv) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**

v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

vi) $1A = A$

vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Multiplicación entre matrices

Una operación muy útil, pero menos intuitiva:

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y si $B = [b_{ij}]$ es una matriz de tamaño $n \times p$, entonces el **producto** AB es una matriz de tamaño $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

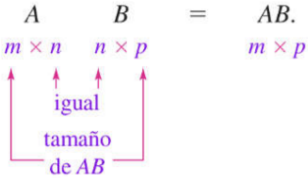
donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq p$.

$$\begin{array}{rcc} & & \text{columna } j \text{ de } B \\ & & \downarrow \\ \text{renglón } i \text{ de } A \longrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Por como se definió, **no es posible multiplicar matrices de tamaño arbitrario.**



Aplicación en sistemas lineales de ecuaciones, ya vimos que con los tamaños apropiados, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $X \in \mathbb{R}^n (R^{n\times 1})$, $b \in \mathbb{R}^m (R^{m\times 1})$ el sistema queda, en su forma matricial $A\,X = b$, una multiplicación de matrices.

La operación de multiplicar matrices no es conmutativa.

Cuentas, ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & \mathbf{3} \\ 0 & -1 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & 7 & 5 & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(1\cdot 3) + (2\cdot 1) + (4\cdot 2) = 13}$$

Este mismo caso, para los demás elementos

$$\begin{aligned} (1\cdot 4) + (2\cdot 0) + (4\cdot 2) &= 12 \\ (1\cdot 1) - (2\cdot 1) + (4\cdot 7) &= 27 \\ (1\cdot 4) + (2\cdot 3) + (4\cdot 5) &= 30 \\ (2\cdot 4) + (6\cdot 0) + (0\cdot 2) &= 8 \\ (2\cdot 1) - (6\cdot 1) + (0\cdot 7) &= -4 \\ (2\cdot 3) + (6\cdot 1) + (0\cdot 2) &= 12 \end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, no se puede efectuar la multiplicación BA.

Propiedades del producto matricial

En lo que sigue entendemos que las operaciones mencionadas pueden efectuarse.

1) $(AB)\,C = A\,(BC)$ asociatividad

2) $(A+B)\;\;C = AC + BC$ distributividad a derecha

$P\,(Q+R) = PQ + PR$ distributivida a izquierda

3) $(kA)\,B = k\,(AB) = A\,(kB) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$

4) $OA = O \quad y \quad AO = O \;,$ siendo O la matriz nula

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que indicamos como A^T, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene a partir de A cambiando las filas por las columnas.

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces su transpuesta es $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Se cumple:

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Matriz identidad

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cuadrada de tamaño n, se tiene una matriz I que es el elemento neutro del producto:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad \text{esto es} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $AI = IA = A$.

Comentario: una matriz cuadrada con $A_{ij} = 0$ si $i \neq j$ se llama matriz diagonal. La identidad es un caso particular de matriz diagonal. Cualquier matriz diagonal es igual a su transpuesta.

Cancelación de factores

Ejemplo: Consideremos estas matrices de 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Calculá los productos AB ; AC y AD. Compará los resultados entre ellos.

Notemos que, por como se define el producto matricial,

No podemos cancelar matrices como con el producto de números.

Esta igualdad entre matrices $MN = MP$ no implica que $N = P$. En algún caso puede darse, pero NO es general.
En cambio al revés, sí: $N = P \Rightarrow MN = MP$.

Además vimos que $AD = 0$ pero $A \neq 0$ y $D \neq 0$.

Matrices cuadradas especiales

Algunos ejemplos

- $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq 3\}$ (matrices simétricas)
- $S_2 = \{A \in \mathbb{Z}^{3\times 3} / a_{ij} = -a_{ji}, 1 \leq i, j \leq 3\}$ (matrices antisimétricas)
- $S_3 = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} / a_{ij} = 0, si\ i < j\}$ (matrices triangulares inferiores)
- $S_4 = \{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} / a_{ij} = 0, si\ i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y S el conjunto de matrices de 2×2 de traza nula:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, a + d = 0 \right\}$$

- S puede ser también escrito como $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

En cambio otras no tienen un nombre en particular

$$S_5 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / A \text{ tiene alguna fila nula}\}$$

Recordemos $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$; entonces el producto $C = AB$ es $C \in \mathbb{R}^{m\times r}$; donde

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

Consideremos este ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+2 \\ 3+8 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 2-8 \\ 2+3 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

¡¡Se observa que el orden de los factores **sí altera el producto!!**

Ecuaciones matriciales - ejemplo 2

En este caso se pide hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dado que la propiedad conmutativa no es válida cuando se trata de matrices, miramos con cuidado: en este caso A es la incógnita; y por ello sus 4 elementos.

Podríamos dejar los A_{ij}, con $i, j = 1, 2$ (intenten) pero, será más práctico renombrar las incógnitas con cuatro letras a, b, c y d como nombres genéricos que sugieren un orden.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ahora escribamos ambos miembros de la ecuación del ejercicio. Primero el miembro izquierdo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+c & -2b+d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}$$

Mientras que el miembro derecho es

$$A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+2b & a-b \\ -2c+2d & c-d \end{pmatrix}$$

Igualamos esos dos resultados para construir un sistema de ecuaciones. Tenemos que

$$\begin{pmatrix} -2a+c & -2b+d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+2b & a-b \\ -2c+2d & c-d \end{pmatrix}$$

Las matrices deben ser iguales elemento a elemento, lo que permite encontrar relaciones entre las incógnitas.

Escribamos la matriz asociada al sistema de 4 de ecuaciones, de incógnitas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{aligned} -2a + c &= -2a + 2b \\ -2b + d &= a - b \\ 2a - c &= -2c + 2d \\ 2b - d &= c - d \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2b - c &= 0 \\ a + b - d &= 0 \\ 2a + c - 2d &= 0 \\ 2b - c &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccr|c} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Observamos que es un sistema homogéneo y que las filas 1 y 4 son idénticas, con lo cual el sistema es compatible indeterminado, ya que con seguridad una de las filas se lleva a ceros.

Haciendo operaciones sobre las filas obtenemos la matriz ampliada equivalentre que está reducida y escalonada.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejamos las incógnitas de los 1 principales $\begin{cases} a & = -\frac{c}{2} + d \\ b & = \frac{c}{2} \end{cases}$

y los parámetros del conjunto solución son c y d. Volcando lo que obtuvimos en la matriz A, la solución es

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{c}{2} + d & \frac{c}{2} \\ c & d \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Probar con algunas soluciones particulares y se terminó del ejercicio.

Potencias de matrices cuadradas

Ejemplo sencillo

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Potencias de matrices

Mediante la multiplicación repetida de una matriz se tienen sus potencias naturales.

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ veces}}$$

Por completitud de notación, $A^0 = I$.

$A^{-1} = ?$ no siempre existe.

Matriz inversa

En $\mathbb{R}$ existe el inverso multiplicativo para todo número real distinto de cero. Dado un número real a distinto de cero, b es su inverso multiplicativo si y solo si a.b=1. A continuación definiremos el inverso multiplicativo para matrices cuadradas.

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.

Una matriz inversible también se suele llamar *no singular*.

Ejemplo

Demuestre que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Usando la definición de matriz inversa, puede ver que B es la inversa de A para demostrar que $AB = I = BA$, de la siguiente manera

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo

Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar la inversa de A, resuelva la ecuación matricial $AX = I$ para X.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, igualando los elementos correspondientes, obtiene los dos sistemas de ecuaciones que se muestran

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilice la multiplicación de matrices para verificar

Metodología

La generalización del método aplicado para resolver el ejemplo proporciona un procedimiento conveniente para encontrar la inversa. Primero observe que los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

tienen la *misma matriz de coeficientes*. En lugar de resolver los dos sistemas representados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

separadamente, puede hacerlo de manera simultánea. Usted puede hacer esto **adjuntando** la matriz identidad a la matriz de coeficientes para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, puede resolver *ambos* sistemas con un sencillo proceso de eliminación, como el siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \rightarrow R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \rightarrow R_1 + (-4)R_2$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz "doblemente aumentada" $[A \quad I]$, usted obtiene la matriz $[I \quad A^{-1}]$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{A}\!\!\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \longrightarrow \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\underbrace{\begin{matrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

Ejemplo con matriz no inversible 3×3

Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Al aplicar el procedimiento del ejemplo 4 se obtiene

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó -2 veces el primer renglón al segundo y se sumó el primer renglón al tercero.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó el segundo renglón al tercero.

Dado que en el lado izquierdo se ha obtenido un renglón de ceros, se concluye que A no es invertible.

Determinación de la inversa de una matriz

por eliminación de Gauss-Jordan

Un método para hallar la inversa de una matriz (cuadrada, e invertible) consiste en ampliarla con la identidad y realizar Gauss-Jordan. Osea, se empieza con $(A|I)$, y se aplican operaciones elementales hasta finalizar con $(I|A^{-1})$.
Por último se verifica.
Si la reducción de A conduce a alguna fila de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A **no es inversible**.
Esto es consecuencia del siguiente

Teorema

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son equivalentes:

- A es inversible.
- $Ax = b$ tiene solución única, cualquiera sea $b \in \mathbb{R}^n$.
- A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

PROPIEDAD: Si A es una matriz no-singular, su inversa A^{-1} es **única** para A.

Ecuaciones matriciales - ejemplo 3

Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $AX + B = BX + A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Mediante aritmética podemos reorganizar la ecuación de forma conveniente:

$$AX + B = BX + A \Rightarrow AX - BX = A - B$$

Por asociatividad del producto, entonces $(A - B)X = A - B$
Si llamamos $C = A - B$ tenemos $CX = C$.
Si supieramos que C es inversible, osea $\exists C^{-1}$, multiplicando a derecha en ambos miembros

$$\begin{aligned} C^{-1}CX &= C^{-1}C \\ I\,X &= I \Rightarrow X = I \end{aligned}$$

Queda pendiente responder: ¿cómo podemos saber si una matriz es inversible?

Apéndice: cosas sueltas

Otra propiedad de interés que verifica el producto. Dadas A y B matrices inveribles, se verifica que

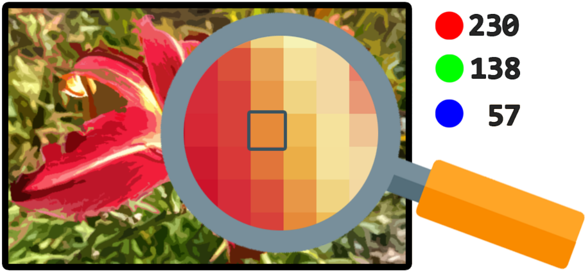
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Cuando hablamos de proposiciones *equivalentes*, quiere decir que todas son verdaderas o todas son falsas simultáneamente. Simbólicamente se utiliza entre ellas $\equiv$, o la flecha con dos puntas, $\Leftrightarrow$ ya que son proposiciones que se implican entre sí.

Aplicación en informática

Representación digital de imágenes

Un Bitmap es un modo elemental para representar imágenes digitales como información en la memoria de una computadora. Consiste, básicamente, en formar arreglos de elementos ordenados de modos específicos. Para el caso típico de imágenes 2D, se realiza un ordenamiento por filas de elementos de matriz (pixels) asignando a cada uno un conjunto de valores por canales (r, g, b) que determina el color en esa posición de la imagen.



El procesamiento digital de imágenes hace un uso intensivo de matrices, aunque tengamos una interfaz gráfica como ser photoshop.