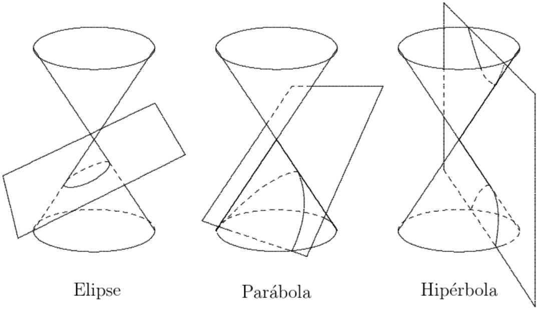
Unidad 8: Cónicas

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Introducción histórica

"*Las Cónicas*" de Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C), constaban de ocho libros. Esta obra es el resultado de estudiar las secciones de un cono a las que denominó cónicas. Se obtenían al cortar mediante una superficie plana un cono circular en diversas posiciones.

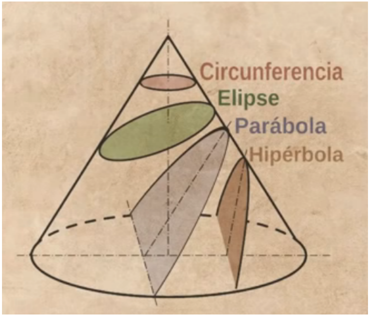


Aunque estos conceptos no tuvieron posibilidad de ser aplicados a la ciencia de su época, su importancia ha quedado plenamente justificada con el paso del tiempo.

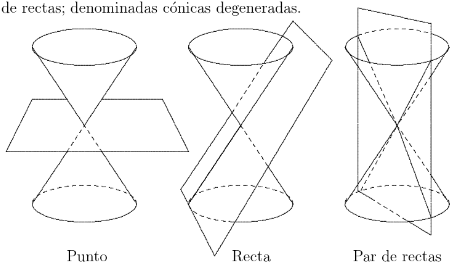
Película recomendada: Agora (2009)

Las cónicas

En simultáneo

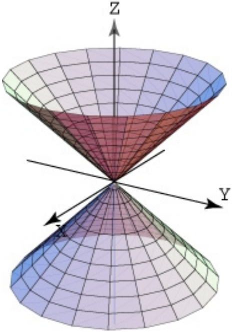


Si el plano pasa por el vértice del cono las posibles intersecciones serán: un punto, una recta ó un par de rectas; denominadas cónicas degeneradas.



Cono y plano

En principio, son superficies de $\mathbb{R}^3$.



La recta generadora forma un ángulo α con el eje z, y gira en torno a dicho eje; lo que llamamos simetría de revolución.

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \tan\alpha^2\, z^2$$

$$\text{cónicas} = \begin{cases} x^2+y^2-\tan\alpha^2 z^2 = 0 \\ Ax+By+Cz = D \end{cases}$$

Trabajando este sistema (no lineal) de ecuaciones y luego dando la libertad de trasladar la curva resultante se obtiene una ecuación general.

En $\mathbb{R}^2$

Ecuación general de segundo grado en x e y

$$ax^2 + by^2 + cxy + dy + ex + f = 0$$

y su lugar geométrico (gráfica) corresponde a una de las cónicas: círculo, elipse, hipérbola o parábola. Para llegar a su ecuación reducida se agrupan cuadrados. De ser necesario, se hace una traslación, y/o una rotación.

La parábola la conocen de AM, este cuadro resume algunas de las fórmulas principales que interesa recordar:

Círculo:	$x^2 + y^2 = r^2$
Elipse:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hipérbola:	$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{o} \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \end{cases}$

2. La circunferencia

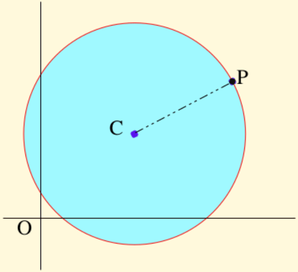
Definición 2.1 *Una circunferencia es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo C llamado (centro)*

$$d(P, C) = cte = radio$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera verificando $d(P, C) = r$, siendo r el radio y $C(x_0, y_0)$ el centro. De la fórmula de la distancia de dos puntos se tiene

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

y elevando al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia



$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{1}$$

Cuando la circunferencia tiene el centro en el origen se tiene la ecuación reducida

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{2}$$

Ejemplo 2.1. Halla el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4\,x - 6\,y = 12$$

Solución:
Para conseguir la ecuación reducida del tipo (1) se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $x^2 - 4\,x = x^2 - 2 \cdot 2\,x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$
- $y^2 - 6\,y = y^2 - 2 \cdot 3\,y + 9 - 9 = (y-3)^2 - 9$

sustituyendo en la expresión dada se obtiene

$$(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = 12 \Longrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

luego el centro es $C(2,3)$ y el radio $r = 5$ $\square$

Ejercicio: Hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 18x - 9 = 0$$

Nota: otras parametrizaciones, incluyendo coordenadas polares, pueden resultar más convenientes. Ej. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 3\cos(t);\ y = 3\sin(t), t \in [0, 2\pi]\}$

Situación de una recta respecto de una circunsferencia

Sabemos medir la distancia entre una recta y un punto.

Si desde un punto $P(x, y)$ trazamos una recta t, será tangente a una circunferencia cuando la distancia del centro a la recta coincida con el radio.

- la recta es tangente si

$$d(C, t) = radio$$

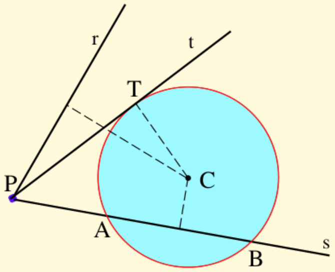
- la recta se llama exterior si

$$d(C, r) > radio$$

- la recta se llama secante si

$$d(C, s) < radio$$

la intersecta en dos puntos A y B.

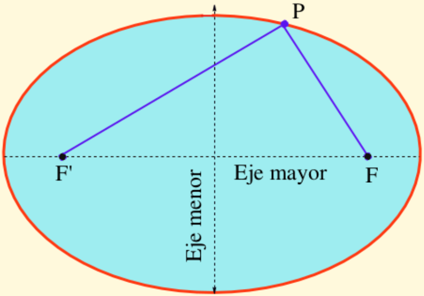


El segmento entre A y B se llama una cuerda. Si la cuerda pasa por el centro, su longitud se llama diámetro de la circunsferencia.

Elipse

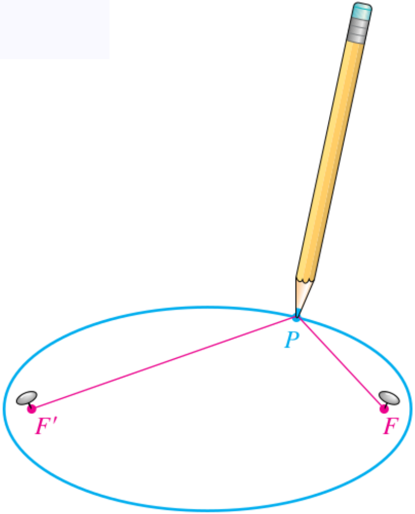
Definición 3.1 *Una elipse es el lugar geométrico de los $P(x,y)$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante*

$$|PF| + |PF'| = cte = 2a$$



Para su construcción manual, se toma un segmento de longitud $2\,a$ y se sujetan sus extremos en los puntos F y F', los focos, si se mantiene el segmento tirante y se va girando se obtiene el gráfico de la elipse.

A mano (pero no es fácil en el pizarrón)



Distancia del centro a un foco

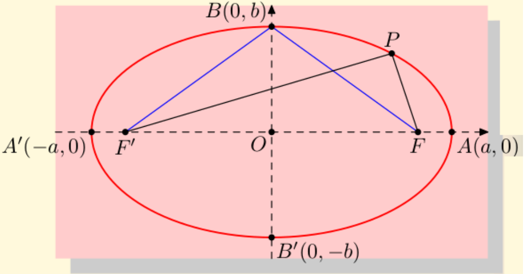
Teorema 3.1. La ecuación reducida de una elipse cuando los focos están situados en el eje Ox y $|PF| + |PF'| = 2a$ corresponde a:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c, 0)\ F'(-c, 0)$
- el centro es $O(0, 0)$
- vértices A, A', B, B'
- En el gráfico se tiene

$$BF = a$$

$$OB = b \quad OF = c$$



luego por el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

Ejemplo

Halla el eje mayor, el eje menor, los vértices, y los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Solución:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

se tiene:

- Eje mayor $2a = 2 \cdot 5 = 10$
- Eje menor $2b = 2 \cdot 4 = 8$
- Vértices $A(5,0)$,$A'(-5,0)$,$B(0,4)$ y $B'(0,-4)$
- Los focos. Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$$F(3,0) \qquad F'(-3,0)$$

Excentricidad

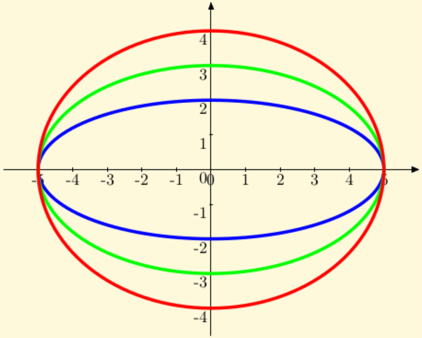
Llamamos excentricidad e de una elipse al cociente entre la distancia focal y el eje mayor.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

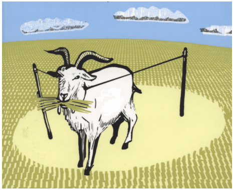
La excentricidad mide el grado de achatamiento de la elipse

- $e = 0{,}6$
- $e = 0{,}8$
- $e = 0{,}9165$

Cuanto mas cerca está e de uno , más achatada está. Si $e = 0$, la elipse es una circunferencia



Cambio de centro: traslación de la cónica



La ecuación de la elipse cuando el centro está en el punto $O = (u, v)$ es

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Ejercicio Hallar el eje mayor, los vértices, los focos y la excentricidad de la elipse con ecuación

$$3x^2 + 6y^2 = 12$$

¿Cómo se escribe la misma elipse pero centrada en $O = (-1, 4)$? ¿Cuánto valen las coordenadas de los focos?

Aplicación 1: Polarización de la luz

La punta del vector de campo eléctrico de una onda describe una elipse en cualquier plano fijo normal a la dirección de propagación.

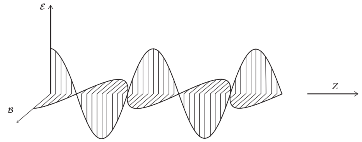


Figure 2.1. Electric and magnetic fields in a linearly polarized wave.

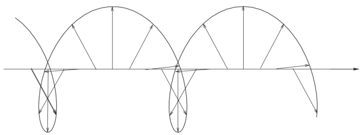


Figure 2.2. A right-hand circularly polarized wave at an instant of time. The tip of the electric vector rotates clockwise as seen from the source and counterclockwise when viewed with the wave approaching.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(z,t) = (\hat{\mathbf{x}}\mathcal{E}_x e^{i\phi_1} + \hat{\mathbf{y}}\mathcal{E}_y e^{i\phi_2})\exp[i2\pi(\nu t - kz)]. \qquad (2.5)$$

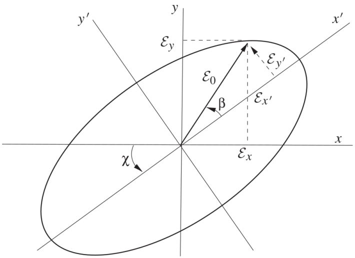


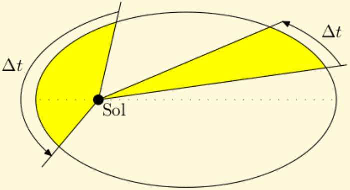
Figure 2.3. The polarization ellipse. The tip of the electric vector $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ traces an ellipse; it may be regarded as the sum of two quadrature phased components on the major and minor axes, or two components $\mathcal{E}_x$ and $\mathcal{E}_y$ with a different relative phase.

Otras formas de polarización, tales como la circular y la lineal, se pueden considerar como casos especiales de la polarización elíptica.

Aplicación 2: El movimiento de los planetas

Johannes Kepler (1571-1620)
En 1609 publica, utilizando las observaciones de su maestro Tycho Brahe, su obra *Astronomía Nova* en donde enuncia las dos primeras leyes referente a las órbitas de los planetas. Posteriormente, en 1619, publica la tercera.

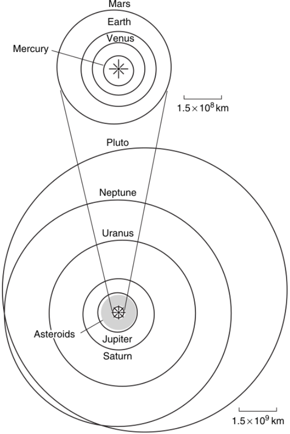
Primera Ley Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.

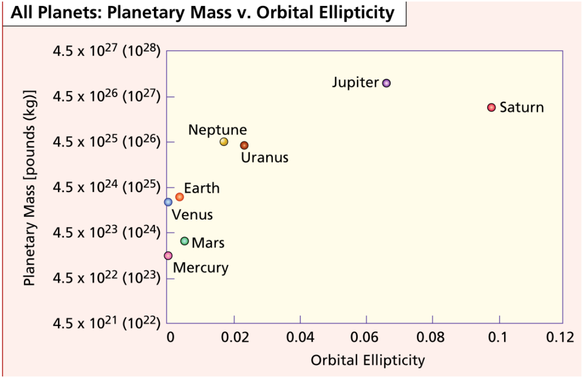


Segunda Ley Las áreas barridas por la recta que une el sol con el planeta son directamente proporcionales a los tiempos empleados en barrerlas.

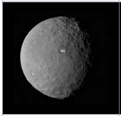
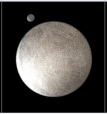
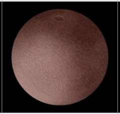
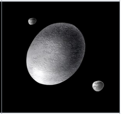
(Si las áreas dibujadas son iguales, entonces la velocidad del planeta es mayor en el perihelio que en el afelio)

Tercera Ley Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.



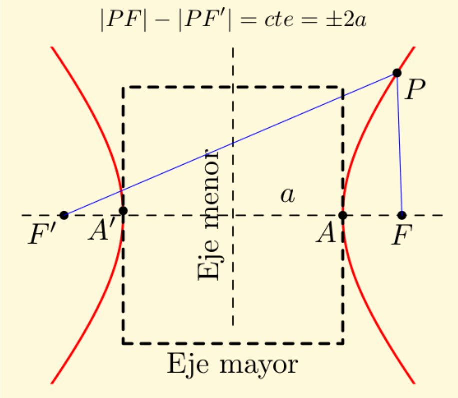


Planetas enanos

	Ceres	**Plutón**	**Eris**	**Makemake**	**Haumea**
					
Período orbital* (en **años siderales**)	4,599	248,09	557	309,88	285
Velocidad media de órbita (en **km/s**)	17,882	4,7490	3,436	4,419	
Excentricidad de la órbita	0,080	0,24880766	0,44177	0,159	0,1887

Hipérbola: una curva con dos ramas

Llamamos hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es constante en valor absoluto, menor que la distancia entre los focos y no nula.

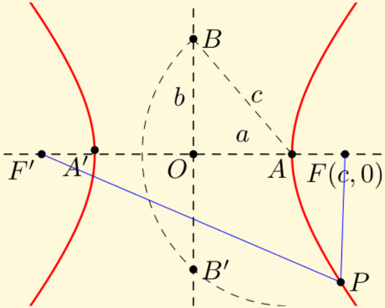


Ecuación reducida de la hipérbola

Teorema 4.1. La ecuación reducida de una hipérbola cuando los focos están situados en el eje Ox y $|PF| - |PF'| = \pm 2a$ corresponde a:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

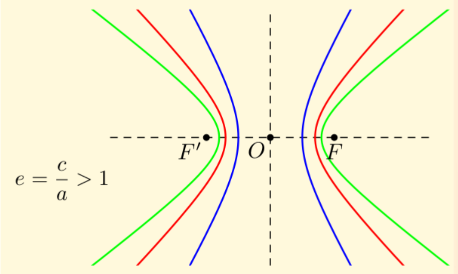
- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c, 0)\, F'(-c, 0)$
- vértices A, A', B, B'
- B y B' son los cortes de la circunferencia con centro en A y radio c.



Obteniéndose la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidad > 1

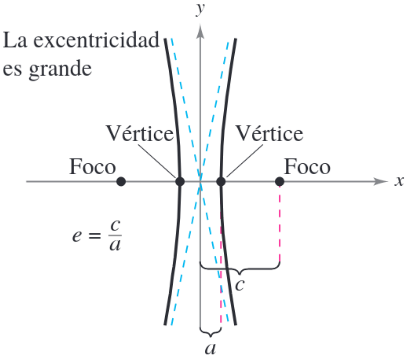


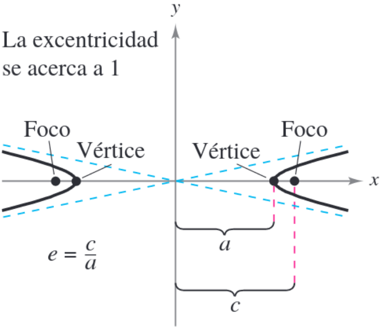
Cuanto más pequeño es a, el valor de la excentricidad e aumenta.
Si ahora el centro está en el punto $O = (u, v)$ es

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Hay dos rectas que son asíntotas de las ramas de la hipérbola. Las ecuaciones de esas asíntotas se determinan igualando a cero la ecuación canónica.

Si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi planas. Si la excentricidad es cercana a 1, las ramas de la hipérbola son más puntiagudas





Aplicación, ejemplo

Dos micrófonos, a una milla de distancia entre sí, registran una explosión. El micrófono A recibe el sonido 2 segundos antes que el micrófono B. ¿Dónde fue la explosión?

Solución Suponiendo que el sonido viaja a 1 100 pies por segundo, se sabe que la explosión tuvo lugar 2 200 pies más lejos de B que de A, como se observa en la figura 10.18. El lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran 2 200 pies más cercanos a A que a B es una rama de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, donde

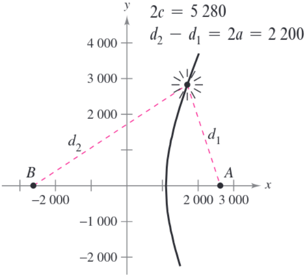
$$c = \frac{1 \text{ milla}}{2} = \frac{5\,280 \text{ pies}}{2} = 2\,640 \text{ pies.}$$

y

$$a = \frac{2\,200 \text{ pies}}{2} = 1\,100 \text{ pies}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= 5\,759\,600 \end{aligned}$$



y se puede concluir que la explosión ocurrió en algún lugar sobre la rama derecha de la hipérbola dada por

$$\frac{x^2}{1\,210\,000} - \frac{y^2}{5\,759\,600} = 1.$$

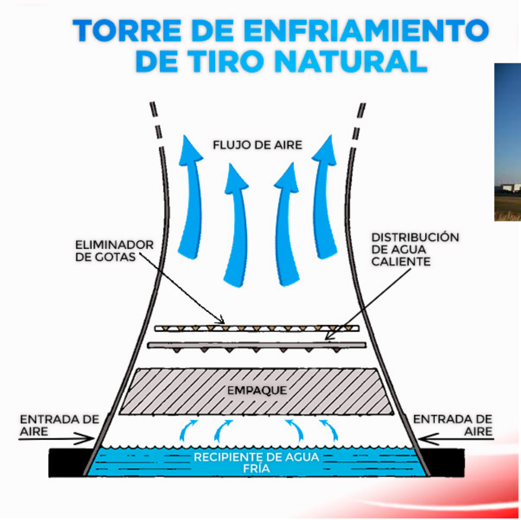
En ese ejemplo anterior, sólo se pudo determinar la hipérbola en la que ocurrió la explosión, pero no la localización exacta.

Sin embargo, si se hubiera recibido el sonido también en una tercera posición C, entonces se habrían determinado otras dos hipérbolas. La localización exacta de la explosión sería el punto en el que se cortan estas tres hipérbolas.

LORAN (LOng Range Aid to Navigation): En épocas previas al GPS había sistemas de guíado para la navegación que implementaban este tipo de triangulación con la ayuda de torres costeras que emitían pulsos sincronizados.

Aplicación, otro ejemplo

El hiperboloide es una forma estándar para las torres de refrigeración, su diseño se enfoca en soportar vientos fuertes y estar construídos con la menor cantidad de material posible.



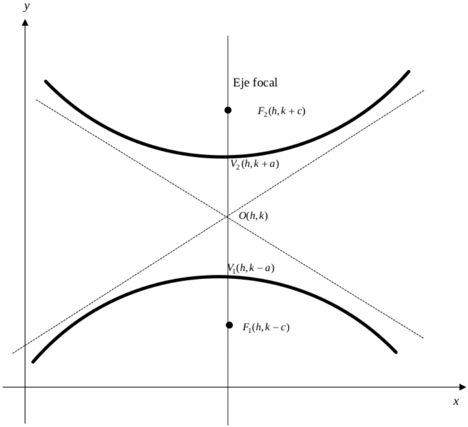
su forma ayuda que el aire fluya hacia arriba, en contraposición al agua, mejorando su eficiencia

Eje focal vertical

La dirección del eje focal esta indicada por el término positivo. Veamos un ejemplo con el centro en $O = (h, k)$

Hipérbola $$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Y su gráfica sería:

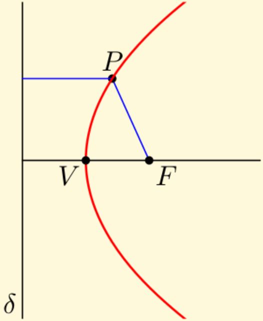


Parábola

El plano que intersecta al cono está inclinado el mismo ángulo α de la recta que genera al cono. Supongamos que no pasa por el origen.

Definición 5.1 *Una parábola es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un recta fija δ (directriz) y de un punto fijo F (foco).*

$$|PF| = d(P, \delta|$$



Ecuación reducida de la parábola

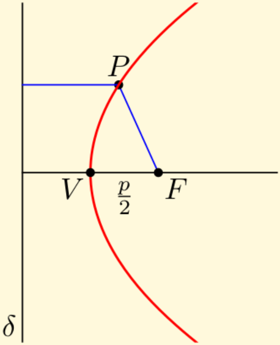
Teorema 5.1. La ecuación reducida de una parábola cuando el foco está en el eje Ox y directriz $\delta \equiv x = -\dfrac{p}{2}$ corresponde a:

$$\boxed{y^2 = 2\,p\,x}$$

Elementos de la parábola

- recta VF es el eje
- Foco $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$
- El vértice es $V(0,0)$
- Directriz $\delta \equiv x = -\dfrac{p}{2}$

El eje y no está graficado, pasa por el vértice.



Si trasladamos la parábola es más fácil guiarse por el vértice. Si $V = (u, v)$ se tiene $(y - v)^2 = 2p(x - u)$

Eje vertical, ahora $(x-u)^2 = 2p(y-v)$

$$4x^2 - 20x = 24y - 97$$

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = \frac{24}{4}y \underbrace{- \frac{97}{4} + \frac{25}{4}}_{-72/4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - 18$$

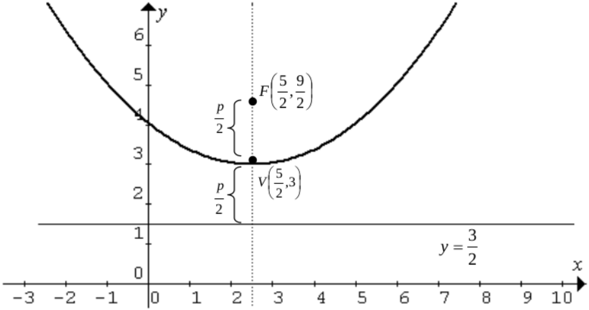
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$$

La parábola tiene vértice $V\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

El eje focal es paralelo al eje y

La parábola es cóncava hacia arriba

$p = 3$ debido a que $6 = 2p$.



Consideremos la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$

Vértice $V = (u, v)$

Con v la altura del vértice, se obtuvo $\delta = v - \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$ altura de la recta directriz. El foco

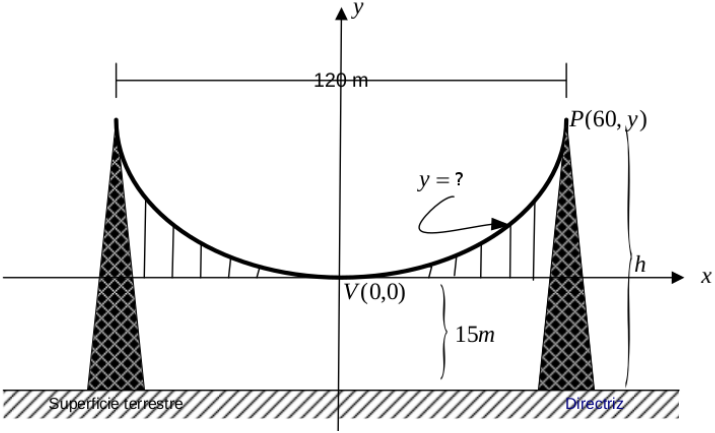
se ubica en

$$F = \left(0, \frac{p}{2}\right) + (u, v)$$

Sobre toda la parábola se hizo una traslación.

Ejemplo aplicado

Un puente colgante de 120 m de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura. La directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a 15 m de altura de dicha superficie, hallar la altura h de las torres. Graficamos eligiendo que el vértice quede en el origen.



Puede hallarse $h = 75$m.

Otro ejemplo aplicable

El interior de una antena satelital de TV es un disco con forma de un paraboloide (finito) que tiene 12 pies de diámetro y 2 pies de profundidad, como se muestra en la figura 10. Encuentre la distancia del centro del disco al foco.

Figura 10

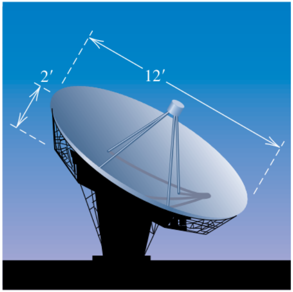
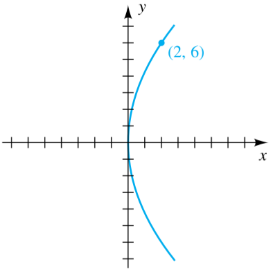


Figura 11



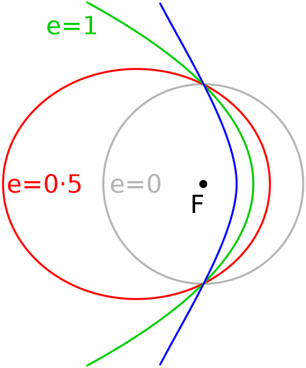
La parábola generadora está trazada en un plano xy en la Figura 11, donde hemos tomado el vértice de la parábola en el origen y su eje a lo largo del eje x. La ecuación de la parábola es $y^2 = 2px$, donde $p/2$ es la distancia requerida del centro del disco al foco. Como el punto $(2,6)$ está en la parábola, obtenemos

$$6^2 = 2p\,2 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{36}{2 \cdot 4} = 4{,}5\,\text{ft}$$

Un pie (ft) equivale a 30.48 cm.

Resumen

Sección cónica	Ecuación cartesiana	Excentricidad (ε)
Circunferencia	$x^2 + y^2 = a^2$	0
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$0 < \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$
Parábola	$y = ax^2 + b$	1
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$1 < \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$



Consideremos este ejemplo

Trabajando con una ecuación de segundo grado, **sin término** xy.

Empezaremos con un ejemplo. Considera la ecuación de segundo grado con dos incógnitas x e y siguiente:

$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x - 12\,y + 8 = 0$$

Para conseguir la ecuación reducida de la cónica se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $2\,x^2 - 4\,x = 2(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2[(x-1)^2 - 1]$
- $3\,y^2 - 12\,y = 3(y^2 - 4y) = 3(y^2 - 4y + 4 - 4) = 3[(y-2)^2 - 4]$

sustituyendo en la expresión dada se obtiene

$$2[(x-1)^2 - 1] + 3[(y-2)^2 - 4] + 8 = 0$$

operando

$$2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 6$$

dividiendo por 6, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Ejercicios

Halla los vértices, los focos y la excentricidad de estas cónicas:

(a) $9\,x^2 + 16\,y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

(b) $x^2 - 4\,y^2 - 2\,x - 3 = 0$

(c) $x^2 + 9\,y^2 - 36\,y + 27 = 0$

(d) $y^2 - 12\,y - 8\,x + 20 = 0$

Soluciones

a) Para conseguir la ecuación reducida de la cónica

$$9\,x^2 + 16\,y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$$

se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $9\,x^2 - 36\,x = 9(x^2 - 4x) = 9(x^2 - 4x + 4 - 4) = 9[(x-2)^2 - 4]$
- $16\,y^2 + 96\,y = 16(y^2 + 6y) = 16(y^2 + 6y + 9 - 9) = 16[(y+3)^2 - 9]$

sustituyendo y operando en la expresión dada se obtiene

$$9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$$

dividiendo por 144, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$0(2,-3) \quad a = 4 \quad b = 3 \quad c = \sqrt{7} \quad e = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Notar que $0(2,-3)$ se refiere al punto central

b) se obtiene la ecuación reducida de la hipérbola

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$0(1,0) \quad a = 2 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{5} \quad e = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

c) se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

$$0(0,2) \quad a = 3 \quad b = 1 \quad c = \sqrt{8} \quad e = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

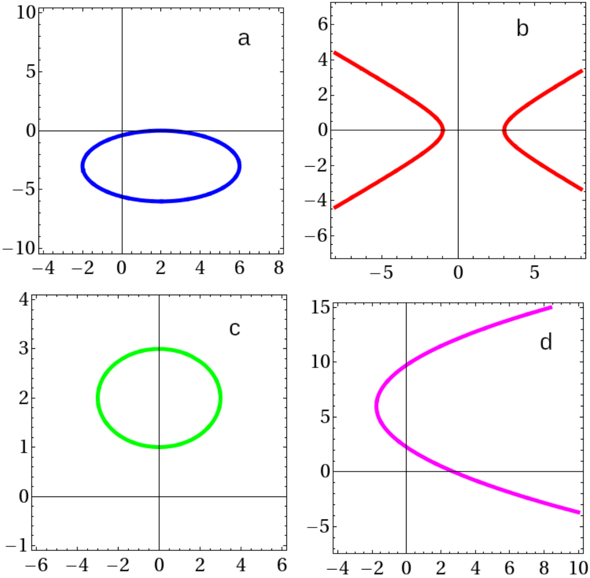
d) la parábola

$$(y-6)^2 = 8(x+2)$$

$$V(-2,6) \qquad p = 4$$

$$F(u + \frac{p}{2}, v) = F(0,6)$$

Gráficas



Rotación de cónicas y el término xy

Se podrá hacer un cambio de coordenadas de modo que la ecuación $ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0$, en caso que tenga soluciones, se transforme en una de las cónicas que presentamos en las secciones anteriores.
https://aga.frba.utn.edu.ar/rototraslacion-de-conicas/

Cuadrática

Conviene este enfoque del tema: pensar la ecuación de segundo grado a través de una función que asocia al vector $\mathbf{v} = (x, y)$ con un número real:

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}A\mathbf{v}^T$$

Con A una matriz de 2×2.

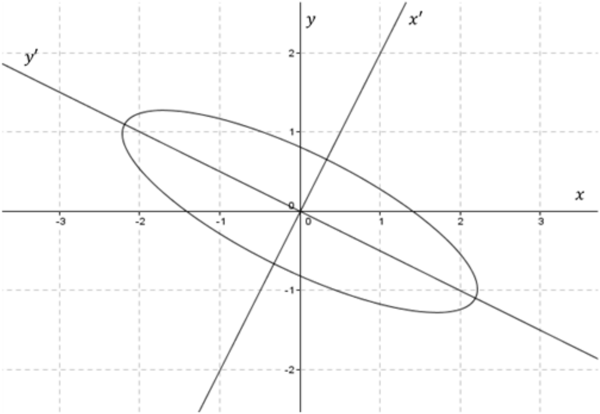
A operadores de este tipo se les suele llamar *forma cuadrática*, de dos variables en este caso.

Aparecen en dimensiones mayores, ver libro de Anton, o el de Lay (cap. 7) por ejemplo.

Ejemplo: cónica rotada

Veamoslo primero graficamente

$$\boxed{3x^2 + 8xy + 9y^2 = 6}$$



Ejemplo clave

Continuamos con $3x^2 + 8xy + 9y^2 = 6$. Ahora introduciendo una matriz

Esta ecuación puede expresarse matricialmente como sigue:

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

Los coeficientes de x^2 y de y^2 van en la diagonal:

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 3 & \\ & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

Y el coeficiente del término rectangular se divide por dos para completar una matriz simétrica:

$$(x \;\; y)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$$

- Sabemos que toda matriz real simétrica es diagonalizable.

Cambio de base con Q ortogonal

Por ser A una matriz simétrica, es ortogonalmente diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \;;\; D = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que $D = Q^T AQ$. En la matriz Q, cuyas columnas son autovectores de A unitarios, cumple $Q^{-1} = Q^T$ y representa un cambio de base particular, una **rotación**. La nueva base es

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

Entonces $[\vec{v}]_B = (x', y')$, $Q = [I]_{B_c B}$, $A = QDQ^T$.
La ecuación de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$(x'y') \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 6 \Leftrightarrow 11x'^2 + y'^2 = 6$$

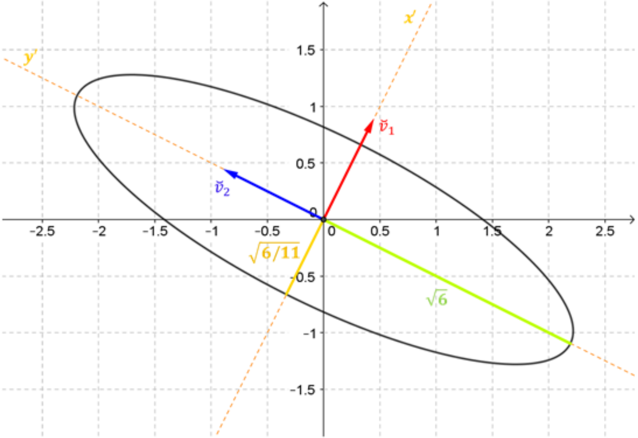
Sin término cruzado, que es lo que buscabamos.

Volviendo a la gráfica

Las columnas de Q indican dirección y sentido positivo de estos los ejes en la nueva base rotada.

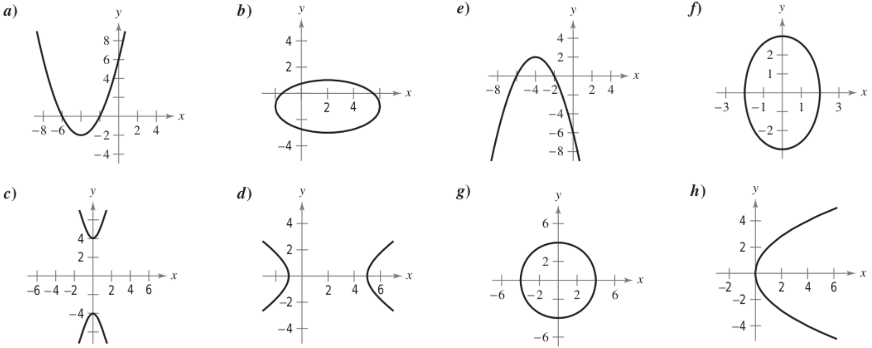
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\breve{v}_1 \qquad \breve{v}_2$$



Por la expresión que vimos para la matriz de una rotación, $Q_{11} = \cos\theta$ y $Q_{21} = \sin\theta$. La calculadora devuelve el ángulo de la rotación, $\theta \approx 63{,}435°$.

Ejercicio: Identificar la ecuación de cada gráfica



1. $y^2 = 4x$

2. $(x+4)^2 = 2(y+2)$

3. $(x+4)^2 = -2(y-2)$

4. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

8. $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Eliminación de productos cruzados

Dada la ecuación en $\mathbb{R}^2$:

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{\substack{forma\\ cuadrática}} = k$$

Buscamos la expresión matricial de la forma cuadrática:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$$

Como la matriz es simétrica, es ortogonalmente diagonalizable. Entonces $\exists Q$ ortogonal tal que $Q^{\top} A\, Q = D$. La matriz Q la obtenemos con los autovectores normalizados.

La matriz Q hallada nos permite proponer un cambio de base o de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = (x'y')\, Q^{\top}$$

Reemplazando

$$(x'y')\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=k$$

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=k$$

Con este procedimiento podemos eliminar el término de producto cruzado, obteniendo la ecuación de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas.

La cónica depende principalmente del valor y combinación de signos de los autovalores de una matriz que construímos con los coeficientes de la ecuación de segundo grado.

Conclusión: Una interesante aplicación de la diagonalización de matrices.

Rototraslación de una cónica

$$x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 2y = 0$$

El término de producto cruzado señala que la cónica está rotada respecto de los ejes canónicos. Además, los términos lineales indican que posiblemente sea necesario realizar una traslación (completando cuadrados) para identificar y graficar la cónica.

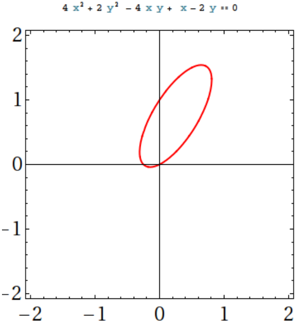
$$x^2 - 4xy + 2y^2 - x - 2y = (x\, y)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1\ -2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

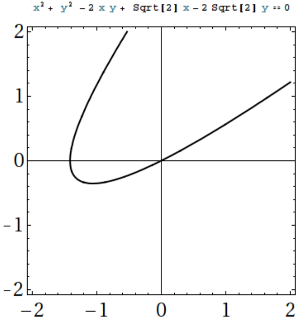
Diagonalizamos ortogonalmente la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, obtenemos Q, luego

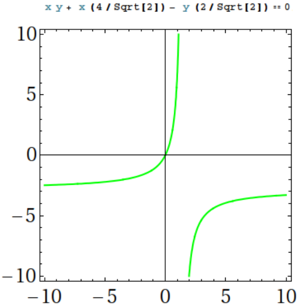
$$x^2 - 4xy + 2y^2 - x - 2y = (x'\, y')D\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (1\ -2)Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Los términos lineales se modifican por el cambio de base realizado.

Otros ejemplos, con rototraslación

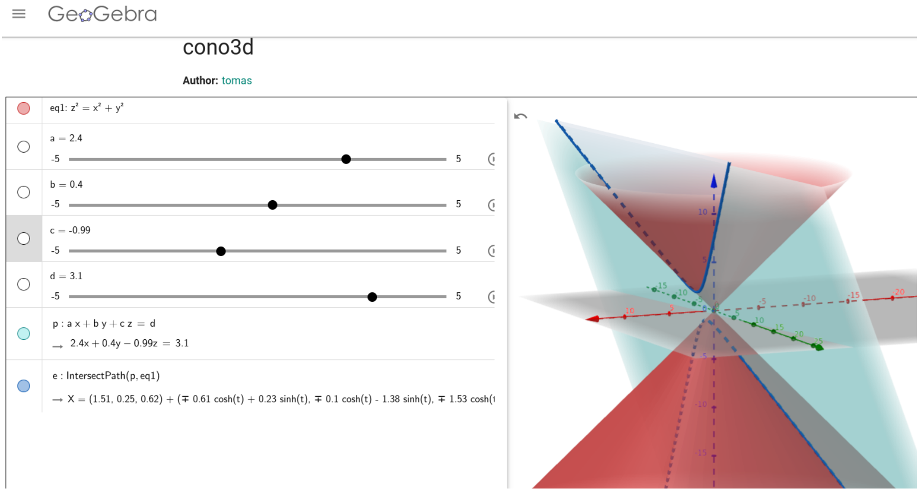






En estas gráficas, el centro de simetría no es el origen (fueron trasladadas). Los ejes focales en cada caso son distintos a los canónicos (x e y) por efecto de la rotación.

Para jugar en geogebra



Link a la versión online.

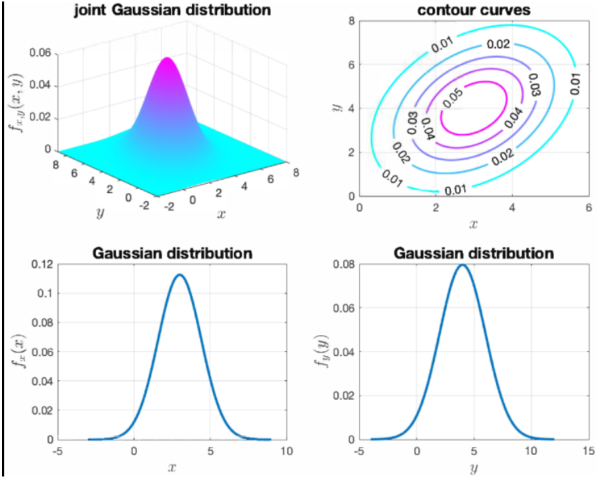
Referencias

Para esta unidad me basé el material de
`Fco Javier Gozález Ortiz, Proyecto MaTEX, ISBN: 84-688-8267-4`
Además, parte de material es del curso online de AyGA de la UTN.

En los libros que venimos usando: la 5ta edición del Anton, o la 7ma de Grossman, o la 3ra de Lay, incluyen el tema de **Formas cuadráticas** con aplicaciones a secciones cónicas haciendo una presentación más algebraica. Se agregan formas bilineales que no vimos en detalle, solo alcanzamos a mencionar las formas cuadráticas.

Apéndice: aplicación en probabilidad de las elipses

Contornos de igual valor para la probabilidad conjunta de (x, y)



Apéndice

info general y despedida

Una vez que hayamos terminado con el curso:

Los resultados (regularidad) de la cursada serán cargados en el Guarani. Los plazos de cierre de acta no dependen de los docentes.

Para rendir el exámen final, consultar fechas de inscripción en el portal de la UNRN (están definidas en el calendario académico) aunque suelen anunciarlas también en el campus. Recuerden que tienen el programa completo aquí en el campus.

Por favor, dirigirse a la oficina de Estudiantes por consultas sobre el procedimiento.

Es importante tener los temas bien firmes, nadie los apura a rendir, los alentamos a estudiar con responsabilidad.

Por medios oficiales se les solicitará que completen una encuesta valorando lo que hicimos este cuatrimestre. Si quieren hacer algún otro comentario, bienvenido, también estamos disponibles. Nos ayudará a proponer mejoras.