Unidad 7: Autovalores

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Potencias de matrices cuadradas

En un problema donde la evolución[1] se pueda modelar como

$$\mathbf{v_{k+1}} = A\mathbf{v_k}$$

para haber llegado a la instancia k se debe calcular

$$\mathbf{v_k} = A\mathbf{v_{k-1}} = A\,A\mathbf{v_{k-2}} = \underbrace{A\,A\,\cdots A}_{k \text{ veces}}\mathbf{v_0}$$

a partir de datos iniciales $\mathbf{v_0}$.
Plantea el uso de potencias de matrices (tan grandes como se desee).

Comentario: Hay pocas ramas científicas y técnicas en las que el análisis de autovalores no tenga una aplicación en un tema fundamental, directa o indirectamente.

[1] El estado de interés se guarda en un vector, $\mathbf{v}$, al que colocamos un subíndice para orden. El paso k es el vector $\mathbf{v_k}$

Multiplicación de matrices, ejemplo

Consideremos el siguiente cálculo simplemente para ilustrar potencias de matrices:

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^6 = \underbrace{A \cdot A} \cdot \underbrace{A \cdot A} \cdot \underbrace{A \cdot A}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -49 & 65 \\ -130 & 146 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -601 & 665 \\ -1330 & 1394 \end{pmatrix}$$

En cambio

Las potencias de una matriz diagonal se obtienen calculando las potencias de los elementos que están en la diagonal principal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$$

Matrices

Si tenemos como dato adicional que $A = PDP^{-1}$ donde $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ y por lo tanto $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; y la notación se eligió para destacar que

D es una **matriz diagonal**: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Como

$$A^6 = (PDP^{-1})^6 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^6P^{-1}$$

Siendo $D^6 = \begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 729 \end{pmatrix}$ se obtiene

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -601 & 665 \\ -1330 & 1394 \end{pmatrix}$$

Vemos que si una matriz es diagonalizable, resulta más sencillo calcular sus potencias. Ese es el problema que queremos estudiar en esta unidad.

Un ejemplo desde otra perspectiva: transformación lineal

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Halle la matriz de T en la base $B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$, donde $\vec{u_1} = (1,1)$ y $\vec{u_2} = (1,2)$.

En la base estandard es $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ pero en la base prima

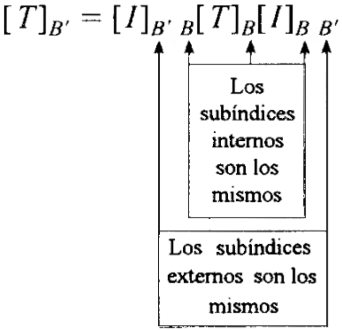
$$[T]_{B'} = [I]_{B'\,B}[T]_B[I]_{B\,B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es más *simple* en el sentido que las matrices diagonal poseen propiedades útiles que no cumplen las matrices más en general.

Repaso: caso de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Nos interesa estudiar cuál es la relación entre dos matrices asociadas a una misma transformación lineal, pero que están expresadas en bases diferentes.
En adelante, cuando demos la matriz con mención a una sola base, quiere decir que toma las coordenadas en una base, transforma al vector, y da el resultado en esa misma base.

¿Cómo afecta un cambio de base a la matriz asociada a una transformación lineal ?



Ref. Anton, p. 497 en la 5ta ed.

Semejanza entre matrices

Definición

Si A y B son dos matrices cuadradas, se dice que B es **semejante** a A si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

B es semejante a A sí, y solo si, A es semejante a B.

Dos matrices que representan al mismo endomorfismo $(T : V \to V)$ en distintas bases son semejantes.

Algunas propiedades (a veces llamadas intrínsecas) como el valor del determinante, son invariantes bajo semejanza, o podría decirse, son independientes de la base.

Autovalor

Empezaremos por recalcar que ahora estudiamos exclusivamente matrices cuadradas, y que mayormente usaremos $\mathbb{R}$ pero podría decirse $\mathbb{C}$.

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un autovector de A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El número λ se llama **autovalor** o valor propio de A.

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, diremos que $\mathbf{v}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ.

La definición es equivalente a pedir que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ pensado como ecuación, tenga para λ dado una solución $\mathbf{v}$ no nula, ya que trivialmente $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$.

Otras notaciones posibles son valor característico y vector característico. Asimismo, una mezcla idiomática hace que en inglés (y por ende en lenguajes de programación) se anteponga del aleman el prefijo para “propio”, resultando *eigenvalues* y *eigenvectors*.

Ejemplo: justificar que un vector es autovector de una matriz

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v_1} = (1, -2)$ como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que $\mathbf{v_1}$ es un autovector correspondiente a $\lambda_1 = 4$.

De manera similar (hacer las cuentas), tenemos que $\mathbf{v_2} = (1, 2)$ es un autovector de A con el correspondiente valor característico $\lambda_2 = 0$, pues $A\,\mathbf{v_2} = 0\,\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$.

Si una matriz tiene al cero como autovalor, se corresponde con una transformación lineal T cuyo núcleo $Nu(T) \neq \{\mathbf{0}\}$, sino que es amplio.

En $\mathbb{R}^2$ que permite graficar

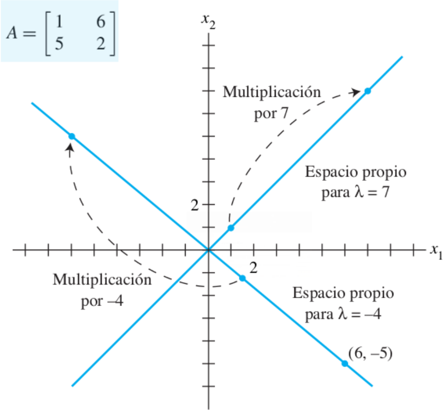
Es importante notar que el efecto de transformar un autovector no modifica su dirección, simplemente lo multiplica por un escalar λ.

El efecto de la transformación lineal con matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, sobre los vectores $\mathbf{u} = (6, -5)$ y $\mathbf{v} = (1, 1)$, es

$$A\mathbf{u} = -4\mathbf{u}$$

$$A\mathbf{v} = 7\mathbf{v}$$

y se esquematiza a la derecha.



Espacios propios para λ = −4 y λ = 7.

Ejercicios

■ Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, probar que $\vec{u} = (3,1)$ es un autovector de A.
¿Cuánto vale el correspondiente autovalor o valor propio λ?

■ Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz, en una base ordenada B es

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Analizar si $[\vec{v}]_B = (-4,-2,-1)$ y $[\vec{w}]_B = (9,3,2)$ son autovectores de T.
En base al resultado ¿es autovector la combinación $\vec{v} + 5\vec{w}$?

(Este ejemplo se retoma en la pag 23.)

Consideraciones geométricas

`El conocimiento de los autovalores de un operador lineal (o matriz) ayuda a comprender la acción de la transformación lineal sobre un autovector.`

Como ejemplo diferente, veamos la transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que corresponde a una rotación de un ángulo θ fijo,

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

justamente, no mantiene la dirección de ningún vector no nulo, salvo que se permita girar $\theta = 180°$ ó cualquier múltiplo de π.
Exceptuando esos ángulos, en cualquier otro caso A_θ no tiene autovalores reales.

- ¿Que pasaría con una transformación lineal que es una dilatación?
- ¿y con la transformación lineal de proyección sobre una dada dirección?

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la ecuación $T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$ define sus autovalores y autovectores, sencillamente se piensa en su matriz asociada que llamaremos A, osea $A\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$.

Notemos que incluso con más generalidad, podría ser $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Recordemos que la identidad I es neutra para la multiplicación de matrices.

$$A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} = \lambda\,I\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\,I\mathbf{v} = (A - \lambda\,I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

como interesa $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se tiene

λ es autovalor de A sí y solo si $(A - \lambda\,I)$ es no invertible.

Cálculo de autovalores y autovectores

Polinomio característico

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama *polinomio característico de* A al polinomio que resulta de

$$p(x) = \det\left(A - x\, I\right)$$

El grado del polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es $gr\, p = n$.

Ecuación para hallar los autovalores

Cualquier valor λ_i que anule (sea raíz) del polinomio característico, es un autovalor de A. Por ello se suele decir que

$$p(\lambda) = \det\left(A - \lambda\, I\right) = 0$$

es la ecuación característica de A.

El subíndice en λ_i lo agregamos porque interesará ordenar y contar cuántos autovalores tiene la matriz.

Ejemplo

Volvamos sobre un ejemplo anterior, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} p(\lambda) =& \det(A - \lambda I) \\ =& \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ =& (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 \\ =& (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Al factorizar p dejamos a la vista que los autovalores, raíces del polinomio característico, son $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$

La multiplicidad como raíces, que ahora llamaremos algebraica vale 1 para ambos autovalores.

Multiplicidad de las raíces del polinomio característico

Multiplicidad algebraica

La multiplicidad algebraica del autovalor λ, es el entero m_a que es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico $p(x) = \det(A - xI)$, es decir, puede factorizarse

$$p(x) = (x - \lambda)^{m_a} q(x) \text{ con } q(\lambda) \neq 0$$

Para indicar este valor más claramente, anotamos $m_a(\lambda)$, y se cumple

$$m_a(\lambda) \geq 1$$

.

Espacios propios

Dada la transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, el siguiente conjunto está definido para incorporar autovectores de un cierto λ y al vector cero:

$$\mathbb{S}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n / T(\mathbf{v}) = \lambda\, \mathbf{v}\}$$

- Dados $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_\lambda$, $\mathbf{v} \in \mathbb{S}_\lambda$, $c \in \mathbb{R}$ se cumple $(\mathbf{u} + c\mathbf{v}) \in \mathbb{S}_\lambda$.
- Los vectores del subespacio $\mathbb{S}_\lambda$ se transforman en vectores de $\mathbb{S}_\lambda$.

$\mathbb{S}_\lambda$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ asociado al autovalor λ.
Como identificamos con A a la matriz de T, se tiene

$$\mathbb{S}_\lambda = Nu(A - \lambda I)$$

Autovectores: continuamos el ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Trabajemos en el mismo orden, $\lambda_1 = 2$. Para hallar los vectores tales que $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, si llamamos a las coordenadas de $\mathbf{v} = (x, y)$ para dejar identificadas las incógnitas, se pasa a resolver el sistema lineal homogéneo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & 1 & 0 \\ -2 & 4-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{F_1 \to -F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = y, \quad \text{con } y \in \mathbb{R}$$

Encontramos una recta de autovectores, $\mathbb{S}_{\lambda_1} = \langle (1,1) \rangle$.

Para $\lambda_2 = 3$, el planteo de $\mathbb{S}_{\lambda_2}$ nos lleva a resolver $(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-3 & 1 & 0 \\ -2 & 4-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{F_1 \to F_1/(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \frac{y}{2}, \quad \text{con } y \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $\mathbb{S}_{\lambda_2}$ es una recta distinta a $\mathbb{S}_{\lambda_1}$. Será de interés dar una base de cada espacio

propio, y aquí es sencillo: $\mathcal{B}_{\lambda_1} = \{(1,1)\}$ y $\mathcal{B}_{\lambda_2} = \{(1/2, 1)\}$.

Base formada por autovectores

Si reunimos las bases anteriores: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \mathcal{B}_{\lambda_2}$ tenemos

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(1/2,1)\}$$

una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores.
Se buscó para que cumpla

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz diagonal!

Se puede ver que si consideramos autovectores de distintos autovalores, son linealmente independientes. Razonemos con dos solamente antes de generalizar: Si consideramos $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ uno de cada autovalor respectivamente, se puede calcular

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} &= \mathbf{0} \text{ combinación lineal igualada a cero} \qquad (1) \\ A(a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}) &= A(\mathbf{0}) \text{ transformando a ambos lados del igual} \\ a_1A\mathbf{v_1} + a_2A\mathbf{v_2} &= \mathbf{0} \text{ por ser una transf. lineal} \\ a_1\lambda_1\mathbf{v_1} + a_2\lambda_2\mathbf{v_2} &= \mathbf{0} \qquad (2) \end{aligned}$$

* Si uno de los $\lambda = 0$ se despeja de (2) que el coeficiente a del otro debe anularse y volviendo a la ecuación (1) se concluye que ambos deben ser cero $a_1 = a_2 = 0$.

* Si ambos $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ de (2) se puede despejar que $a_1\mathbf{v_1} = -\frac{a_2\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v_2}$ y reemplazando en (1):

$$-\frac{a_2\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v_2} + a_2\mathbf{v_2} = a_2\mathbf{v_2}\left(\frac{-\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1}\right) = \mathbf{0} \Rightarrow a_2 = 0$$

y nuevamente reemplazando en (1) se concluye que también $a_1 = 0$.
Con este razonamiento demostramos que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ es LI.

Ejemplo

En base a un ejemplo previo (pag.13.)
$\mathbf{v} = (-4, -2, -1)$ y $\mathbf{w} = (9, 3, 2)$ son autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Una nueva forma de comprobar que son L.I. es por el teorema de la página anterior, viendo que se cumple $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w} = \mathbf{w}$, por lo que estamos en presencia de autovectores de A de distinto autovalor.

Es una alternativa al modo usual, que pasa por plantear una combinación lineal entre los vectores que sea igual a cero y luego ver que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Propiedad: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ son autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ respectivamente, y $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Para continuar se introduce esta definición:

Multiplicidad geometrica

La multiplicidad geometrica del autovalor λ, es el entero m_g que es la dimensión del espacio propio de λ:

$$m_g(\lambda) = dim(\mathbb{S}_\lambda) = dim(Nu(A - \lambda I))$$

Se cumple esta desigualdad $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Cuando las multiplicidades coincidan para cada autovalor, se podrá construir una base del espacio formada exlusivamente por autovectores.

Diagonalización de matrices

Matriz diagonalizable

Decimos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si es posible formar una base de $\mathbb{R}^n$ con autovectores de A.

- A es diagonalizable sí, y solo si, para cada autovalor λ coinciden las multiplicidades algebraica y geometrica, osea se verifica $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Cambio de base para pasar a la matriz diagonal

En ese caso se puede construir la matriz P con los n autovectores L.I. en las columnas, y es una matriz de transición tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

Con lo cual, A y D son matrices semejantes.

Ejemplo de matriz no diagonalizable

Estudiemos $N = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

Su polinomio característico se identifica con el cubo de un binomio (hacer la cuenta) que es

$$p(x) = -(x+1)^3$$

Al estudiar el espacio propio para $\lambda = -1$ encontramos $S_{-1} = \langle (3, -6, 2) \rangle$.

Dado que $m_a(-1) = 3 \neq m_g(-1) = 1$ se concluye que N no es diagonalizable.

Ejemplos

1) Continuar el análisis de esta matriz $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ¿es diagonalizable?

2) $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonalizar y calcular luego M^7.

Resultados: M es diagonalizable. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Con lo cual

$$M = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow M^7 = PD^7P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^7 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 8256 & -8128 & 8128 \\ 0 & 128 & 0 \\ 8128 & -8128 & 8256 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

3) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

4) Un caso con menos ceros en la matriz: conviene aplicar propiedades del cálculo de determinantes para obtener el polinomio característico con una raíz explícitamente a la vista, esto es, ya factorizado $(x - z)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resumen práctico

Si A es diagonalizable

Los valores en la diagonal de D son valores propios de A, cada uno se repite tantas veces como su multiplicidad.

Procedimiento para diagonalizar A

- Se calcula el polinomio característico $p(x) = \det(A - xI)$.
- Se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ de $p(x)$ y se determinan las $m_a(\lambda_i)$.
- Se resuelve cada sistema homogéneo $(A - \lambda_i I) = \mathbf{0}$ para hallar $m_g(\lambda_i)$ y la base de cada $\mathbb{S}_{\lambda_i}$.
- Si **coinciden*** **todas** $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \Rightarrow A$ es diagonal en una base formada por autovectores. $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n}\}$. Dicha base reune las bases de los espacios propios.
- La matriz P tiene a los vectores de $\mathcal{B}$ como columnas, y resulta $D = P^{-1}AP$.

Para chequeo, notamos que $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP$

*Si alguna multiplicidad no coincide $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$, se concluye que "$A$ no es diagonalizable".

Ejemplo en $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Estructurar D a partir de los valores propios correspondientes. En este paso, resulta esencial que el orden de los valores propios corresponda al orden elegido para las columnas de P. Utilice el valor propio $\lambda = -2$ dos veces, una para cada uno de los vectores propios correspondientes a $\lambda = -2$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Es recomendable comprobar que P y D realmente funcionen. Para evitar calcular P^{-1}, simplemente verifique si $AP = PD$. Esto equivale a $A = PDP^{-1}$ cuando P es invertible. (Sin embargo, ¡compruebe que P sea invertible!) Se calcula

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Propiedades (1)

Se puede afirmar que ciertas matrices en particular, son diagonalizables. En el caso general, hay que demostrar que la multiplicidad geométrica y algebraica de los autovalores coincide.

✓ Una matriz de $n \times n$ con n autovalores **distintos** es diagonalizable.

Surge del hecho que $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ aplicado al caso $m_a(\lambda_i) = 1 \ \forall i$ que obliga a tener $m_g(\lambda_i) = 1$ y que coincidan todas las multiplicidades.

Notemos que todos los autovalores diferentes es una condición suficiente pero no necesaria.

Ej, que ya analizamos es $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Propiedades (2)

✓ Una matriz **simétrica real** es diagonalizable. recordar que son las matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ con $A_{i\,j} = A_{ji}$. Si A es cuadrada, real, y tiene esa estructura, $A = A^T \Rightarrow A$ es diagonalizable.

En algunos casos, resulta de interés pensar a los vectores en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar.
Se podrá encontrar una base de autovectores que son ortogonales entre sí, y se los hace unitarios, simplificando la búsqueda de coordenadas en esa base.

Para ampliar:
Referencia diagonalización ortogonal: sección 7.3 del libro de Anton, 5ta edición.

Otras propiedades de una transformación lineal a la que se asocia una matriz cuadrada que son independientes de la base

Dos matrices semejantes tienen el mismo

- Determinante
- Rango
- Traza, la suma de los elementos de la diagonal principal
- ☞ Polinomio característico
- ☞ Autovalores
- ☞ Dimensiones de los espacios propios

Apéndice 1

Un ejemplo más (distinto) en $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

Plantear cómo hallaría todos los valores de c para los cuales A es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Luego leer el desarrollo en el siguiente link, correspondiente a material complementario de la materia que está enlazado al campus:
https://aga.frba.utn.edu.ar/multiplicidades-algebraica-y-geometrica-de-un-autovalor/

Referencia autovalores complejos: sección 5.5 del libro de Lay, 3er edición.
Mismo libro, el ejemplo que introduce al capítulo puede interesar a estudiantes de Ambiental.

Apéndice 2

No demostraremos

Teorema de **Cayley-Hamilton**:

toda matriz satisface su propia ecuación característica.

Esto es, dada una matriz A cuadrada cuyo polinomio característico es $p(x)$, se cumple $p(A) = 0$ (matriz cero).

Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, buscamos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 - 6A + 11I = 0$$

Verificamos. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - 6. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 11. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz: método diferente

Recordamos que una matriz inversible no tiene a cero como autovalor, por lo que habrá término independiente no nulo en su polinomio característico.

Consecuencia interesante:

Si una matriz A es inversible, el teorema de Cayley-Hamilton provee una expresión que permite despejar A^{-1} a partir de una combinación lineal de potencias de A.

Por ejemplo:

Calculemos la inversa de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

La ecuación característica de A es:

$$0 = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

Y dado que toda matriz satisface su propia ecuación característica (Cayley-Hamilton):

$$A^2 - 5A + 5I = 0.$$

Luego, premultiplicando por la inversa de la matriz A, conseguimos que dicha inversa aparezca explícitamente:

$$A - 5I + 5A^{-1} = 0,$$

y fácilmente puede despejarse

$$A^{-1} = I - \frac{A}{5} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

Ej 3x3:

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$, buscamos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3+3\lambda^2-4=0.$$

Aplicada a la matriz

$$\boxed{C^3+3C^2-4I=0}$$

$$I=\frac{C^3+3C^2}{4} \quad\Rightarrow\quad C^{-1}=\frac{C^2+3C}{4}$$

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{C^2+3C}{4}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$