Unidad 6: Polinomios - números complejos

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 06/05/2024

Preliminar

El tema se conecta directamente con el estudio de polinomios, por lo que sugerimos fuertemente repasar estos conceptos:

- Monomios, polinomios
- Coeficientes, coeficiente principal, término independiente, grado
- Operaciones con polinomios.
- División y teorema del resto.

Los casos de Factoreo:

- Factor común
- Factor común en grupos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencias de cuadrados

Recordemos la notación. Por ahora, nos centramos en una única variable, x.

Si $p \neq 0, p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ con $a_n \neq 0$ se define el grado de $p = gr(p) = n$.

Llamamos a a_n coeficiente principal de p.

P_n: los polinomios reales de grado menor o igual a n

$$\boxed{P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n\}}$$

P_n es un subconjunto del conjunto de funciones reales continuas con dominio todo $\mathbb{R}$. En este caso los vectores son polinomios. Resulta obvio que la suma de dos polinomios p y $q \in P_n$ es otro polinomio $\in P_n$, y lo mismo sucede con la multiplicación por un escalar real: Si $q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$,

$$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_n + b_n)t^n$$

$$(\alpha p)(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \ldots + \alpha a_n t^n$$

El vector nulo es el polinomio nulo $0(t) = 0 + 0t + \ldots + 0t^n$

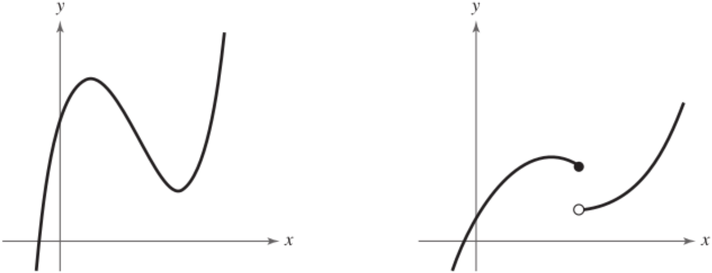
Como espacio vectorial: podemos relacionar $f : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Ejemplificado, hagamos $n = 3$.

$$f(a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

como transformación lineal es un isomofismo.

Como funciones polinómicas de una variable real

continuidad

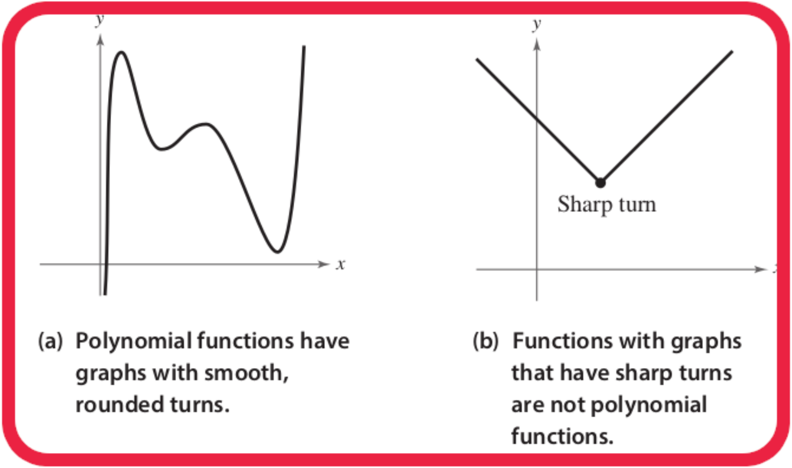


(a) Polynomial functions have continuous graphs.

(b) Functions with graphs that are not continuous are not polynomial functions.

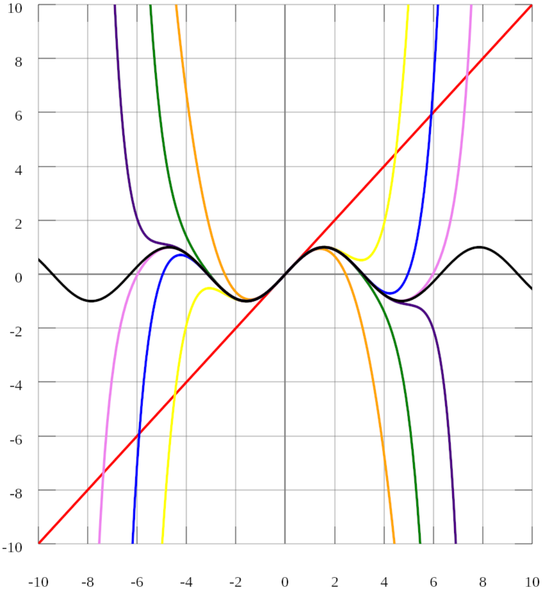
Como función real: suave

deribable



Resultan muy útiles

aproximaciones a sen(x), centradas en 0, de grados 1, 3, 5, 7, 9, 11



Operaciones entre polinomios - más allá de las de espacio

con las operaciones + y . definidas por

con . indica un producto interno, que a dos polinomios, les asigna uno nuevo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum_{i=0}^{m} b_i X^i = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) X^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) . \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) X^k$$

donde $a_i = 0$ para $i > n$ y $b_i = 0$ para $i > m$ y, por convención, $X^0 = 1$.

Ejemplo:

Consideremos $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 3x^2 + 5x - 7$

$$(f+g)(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x - 8$$

$$f \cdot g(x) = \left(3x^2 + 5x - 7\right)\left(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1\right) = 3x^6 + 11x^5 + 12x^4 + x^3 - 24x^2 - 5x + 7$$

División de polinomios

Consideremos estos dos polinomios:

$$D(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \Rightarrow \textit{Dividendo}$$
$$d(x) = x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \textit{Divisor}$$

Para realizar la división de D(x) entre d(x) se procede del modo siguiente:

1. Se colocan los polinomios igual que en la división de números y ordenados de forma creciente.

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \;\; \underline{\big|\; x^2 + 3x - 2 \quad}$$

En el dividendo, si alguna potencia de x no aparece se puede "guardar" el lugar escribiéndola con coeficiente cero

2. Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor. El resultado se pone en el cociente.

2. Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor. El resultado se pone en el cociente.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\
\hline
 & x^2
\end{array}
$$

3. Se multiplica el cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot x^2 = x^4 + 3x^3 - 2x^2$$

Como hay que restar $x^4 + 3x^3 + 2x^2$ del dividendo, le sumamos el opuesto:

$$-(x^4 + 3x^3 - 2x^2) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 \\
\hline
\quad -5x^3 - 9x^2 &
\end{array}
$$

4. Se baja el término siguiento, 30x , y se divide, como en el apartado 2, el primer monomio del dividendo ($-5x^3$) por el primer monomio del divisor (x^2)

$$-5x^3 \div x^2 = -5x$$

y se coloca $-5x$ en el cociente

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\
\cline{2-2}
-x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \\
\hline
\quad -5x^3 - 9x^2 + 30x &
\end{array}
$$

5. Se multiplica $-5x$ por el divisor ($x^2 + 3x - 2$) y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{3-3}
 & -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \\ \cline{2-2}
 & -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
 & \color{red}{5x^3 + 15x^2 - 10x} & \\ \cline{2-2}
 & \color{red}{6x^2 + 20x} &
\end{array}
$$

6. Se baja el último término, –20, y se divide, como los apartados 2 y 4, el primer monomio del dividendo ($6x^2$) por el primer monomio del divisor (x^2)

$6x^2 \div x^2 = 6$, y se coloca 6 en el cociente

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{3-3}
 & -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \color{red}{+ 6} \\ \cline{2-2}
 & -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
 & 5x^3 + 15x^2 - 10x & \\ \cline{2-2}
 & 6x^2 + 20x \color{red}{- 20} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & \big|\; x^2 + 3x - 2 \\
\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\quad & \;\; x^2 - 5x + 6 \\
-5x^3 - 9x^2 + 30x \qquad\quad & \\
\underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} \qquad\quad & \\
6x^2 + 20x - 20 & \\
\underline{-6x^2 - 18x + 12} & \\
2x - 8 &
\end{array}
$$

Como 2x no se puede dividir por x², la división se ha terminado.

Entonces obtenemos que el polinomio cociente es:

$$c(x) = x^2 - 5x + 6$$

y el polinomio resto es:

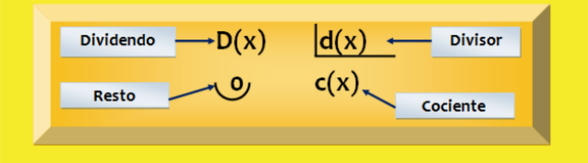
$$R(x) = 2x - 8$$

Comprobamos que:

Grado c(x) = grado D(x) – grado d(x)

Dividendo = divisor * cociente + resto

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$
$$D(x) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (x^2 - 5x + 6) + (2x - 8) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$$



División exacta de polinomios

En una división exacta de polinomios, el resto es igual a cero.

Dividir el polinomio D(x) entre el polinomio d(x) es hallar otro polinomio cociente c(x) tal que multiplicado por el divisor dé el dividendo:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x)$$

División exacta de polinomios

Y si la división no es exacta, hay un resto R(x)

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + R(x)$$

Intro: $\mathbb{C}$

En esta unidad se introduce el plano complejo del cual veremos algunos rudimentos, pero, dada su importancia en las ramas de electrónica y telecomunicaciones cursarán más adelante Análisis Matemático III.

Supóngase que como resultado de un proceso de análisis, el Ing. Juan Pérez haya determinado que la solución de un cierto problema consiste en introducir entre los terminales a y b de un circuito eléctrico una impedancia cuya magnitud a 1000 ciclos por segundo sea igual a $620 - i\ 79{,}557$. El Ing. Pérez conectará entonces entre a y b la impedancia indicada en la fig. , y dará por resuelto el problema.

Caso contrario:

El encontrar una repuesta compleja en un problema del cual se sepa que todos los números y funciones involucradas deben ser reales indica que dicho problema no tiene solución.

Motivación

Si tomamos este simple binomio $x^2 + 1$ y queremos buscar los valores de x para los que se anula: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ obtenemos una ecuación que no se puede resolver en $\mathbb{R}$. Por ello, en matemática se inventó la unidad imaginaria i, de modo que

Definición

$$i^2 = -1$$

El conjunto de los números complejos es

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \Big/ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $z \in \mathbb{C}$, la representación $a + ib$ se llama *forma binómica* de z.

- La parte real de z es el número real a: $Re(z) = a$.
- La parte imaginaria de z es el número real b: $Im(z) = b$.

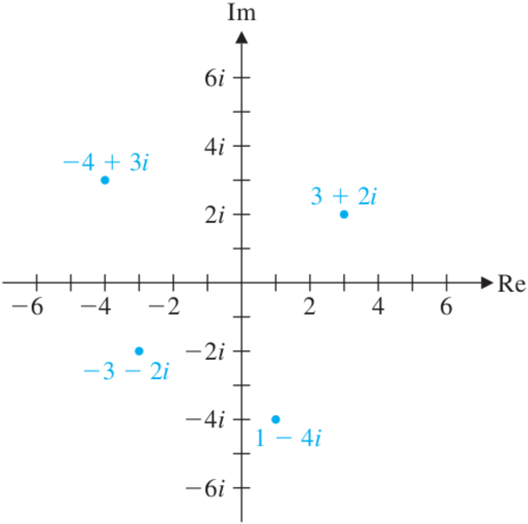
Representación gráfica

Al tener claramente identificadas las partes real e imaginaria se puede hacer un gráfico cartesiano que muestra similitudes entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$.

Es posible ubicar un número complejo z en el plano graficando $Re(z)$ sobre el eje x e $Im(z)$ sobre el eje y.

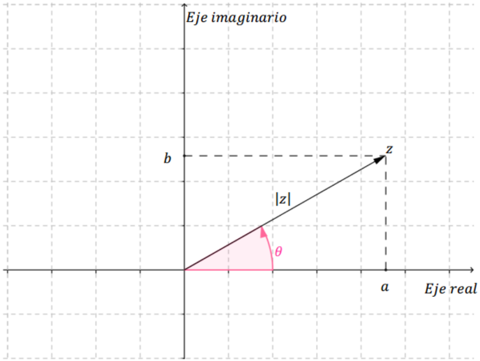
A la derecha mostramos algunos ejemplos.

Hay una distinción lógica entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$: por eso se utiliza notación escalar en $\mathbb{C}$, donde los números pueden emplearse en operaciones que no están definidas en $\mathbb{R}^2$.



Representación polar

También es posible ubicar un número complejo z en el plano dando la distancia al origen (módulo) y el ángulo respecto al eje real. Esto es la forma polar de z.



Si $z = a + ib$ el módulo de z es el número real, no negativo que se obtiene como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mientras que el ángulo θ que forma con el eje de los reales positivos es su *argumento*. Se mide en sentido antihorario y sino, se le asigna signo negativo. Nota: $\arg 0$ no está definido.

Argumento de z

Para $z \neq 0$ hay un único número real, $arg\, z = \theta$ que cumple simultáneamente:

$$0 \leq \arg z < 2\pi, \quad \cos(\arg z) = \frac{a}{|z|}, \quad \sin(\arg z) = \frac{b}{|z|}$$

Teniendo presente las periodicidades de las funciones podemos interpretar los resultados de las calculadoras. Recordemos que siempre son dos valores del ángulo

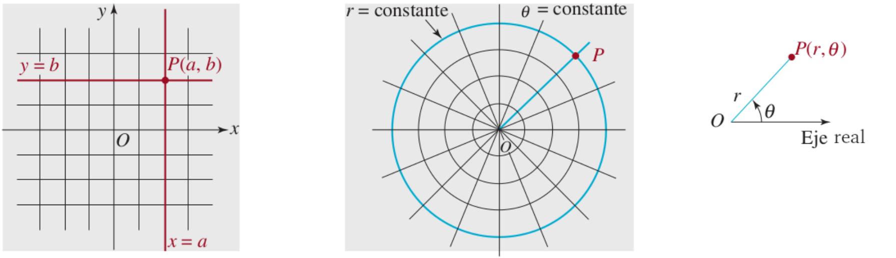
$$\arccos\left(\tfrac{a}{|z|}\right) = \begin{cases} \alpha \\ 360° - \alpha \end{cases} \quad \arcsin\left(\tfrac{b}{|z|}\right) = \begin{cases} \beta \\ 180° - \beta \end{cases} \quad \arctan\left(\tfrac{b}{a}\right) = \begin{cases} \gamma \\ 180° + \gamma \end{cases}$$

donde, como sabemos, $\cos(\theta) \in [-1, 1]$ y lo mismo $\sin(\theta)$, pero $tg(\theta) \in \mathbb{R}$.
De la forma polar se puede volver a la binómica en forma sencilla. Si $\theta = \arg z$, tenemos

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{cases}$$

Se vuelve más simple: Una vez localizado en qué cuadrante se encuentra el ángulo, se suele usar una sola función trigonométrica, por ejemplo calcular $\theta = \pi + \arctan(b/a)$ sabiendo el **cuadrante** del argumento θ que se busca.

Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P



a) Sistema de coordenadas rectangulares *b*) Sistema de coordenadas polares *c*) Coordenadas polares de P

Breve repaso, algunos temas de trigonometría

Puede ser útil memorizar cómo se arma la tabla

Ángulo en grados	0°	30°	45°	60°	90°
Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno del ángulo	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno del ángulo	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente del ángulo	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

y conocer estas propiedades:

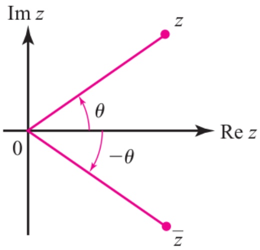
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) . \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) . \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) . \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) . \sin(\beta)$$

Operaciones aritméticas en $\mathbb{C}$

Sean dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$

- $z = w \Leftrightarrow Re(z) = Re(w)$ y $Im(z) = Im(w)$
- Suma: $z + w = (a + c) + i(b + d)$
- Producto: $z\,w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ donde se operó normalmente, usando además $i^2 = -1$.
- Se define el conjugado de un complejo: $\overline{z} = a - ib$



El conjugado de z tiene la parte imaginaria cambiada de signo, y esto equivale a tomar el ángulo en sentido opuesto, sin cambiar el módulo $|z| = |\overline{z}|$

Resultados de interés:

- $|z|^2 = z\overline{z}$
- Si $z \neq 0$ el inverso de un complejo cumple $\boxed{z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z^2|}}$

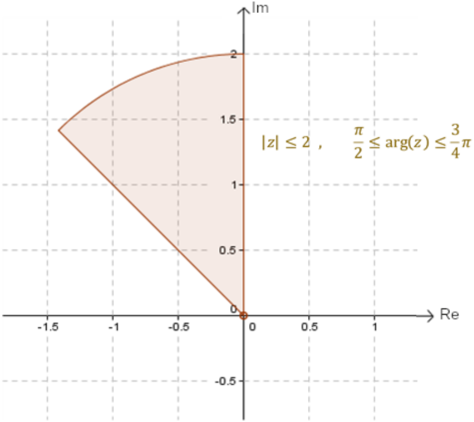
  Para obtener ese resultado, aplicamos la idea bastante práctica de multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.
  Veamos un ejemplo (hagan Uds. las cuentas):

$$\frac{1+14i}{4-i} = \frac{1+14i}{4-i}\,\frac{4+i}{4+i} = \frac{-10+57i}{4^2+1^2} = -\frac{10}{17} + i\frac{57}{17}$$

Mini ejercicios

- Si $z_0 = -1 + i$, representar en el plano $B = \{z \in \mathbb{C} \big/ |z - z_0| \leq 2\}$
- Bosquejar el conjunto de puntos en el plano que satisface $0 \leq \arg(z) \leq \pi/6$.

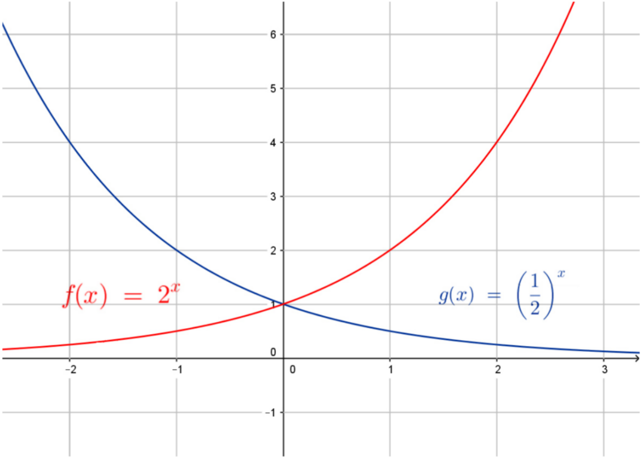
- Describa el conjunto sombreado usando una desigualdad y el argumento de z. El origen no está incluido, porque no tiene argumento.



https://aga.frba.utn.edu.ar/regiones-del-plano-complejo/

Función exponencial en los reales

La recordamos, y será muy útil en otros contextos



Pero es **distinta si se evalúa en el plano** $\mathbb{C}$, donde la aritmética es más rica.

Euler: el principal matemático del siglo XVIII

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad e = \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

y también la serie:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Además, muy conocido por

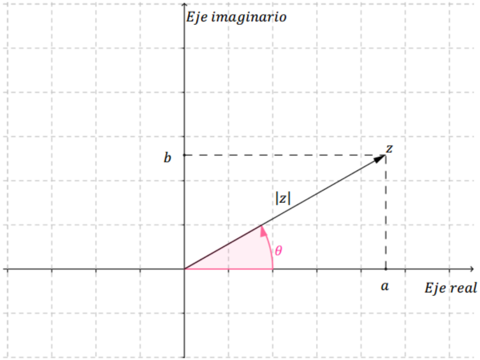
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$

Gracias a la identidad desarrollada* por Leonhard Euler (1707–1783) se tiene una forma aún más compacta de expresar un complejo.

* La demostración del teorema necesita algunos conocimientos de cálculo.

Representación polar

Es posible ubicar un número complejo z en el plano dando la distancia al origen (módulo) y el ángulo respecto al eje real. Esto es la forma polar de z.



Si $z = a + ib$ el módulo de z es el número real, no negativo que se obtiene como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mientras que el ángulo θ que forma con el eje de los reales positivos es su *argumento*. Se mide en sentido antihorario y sino, se le asigna signo negativo. Nota: $\arg 0$ no está definido.

Para invertir el efecto, si $\theta = \arg z$, tenemos

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{cases}$$

Notación exponencial

Para un complejo $z \in \mathbb{C}$, si $\alpha = \arg(z)$ podemos escribir $z = |z|e^{i\alpha}$.
Dado $x \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente identidad

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Cuando $x = \pi$ se despeja la expresión $e^{i\,\pi} + 1 = 0$, que algunos llaman fórmula de Euler.

Si $z_1 = |z_1|e^{i\alpha}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\beta}$ entonces:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \alpha - \beta = k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

puesto que al cabo de un número entero de vueltas del argumento, las funciones trigonométricas se repiten.

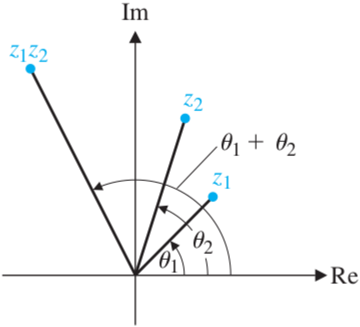
Las propiedades de las potencias (de igual base) ayudan a verificar algunos resultados, y simplifican cálculos.

Esquema del producto

En notación exponencial

- Conjugado: $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$.
- $z_1\, z_2 = |z_1|\,|z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- Si $|z_2| \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$



Otra utilidad, por ejemplo

$$\boldsymbol{e^{i\theta}}.\boldsymbol{e^{i\mu}} = (\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\mu + i\sin\mu) = (\cos\theta\cos\mu - \sin\theta\sin\mu) + i(\cos\theta\sin\mu + \sin\theta\cos\mu) = \cos(\theta+\mu) + i\sin(\theta+\mu) = \boldsymbol{e^{i(\theta+\mu)}}$$

Potencias, un primer caso

Potencias de i

Las potencias de la unidad imaginaria tienen un comportamiento cíclico, como veremos a continuación:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

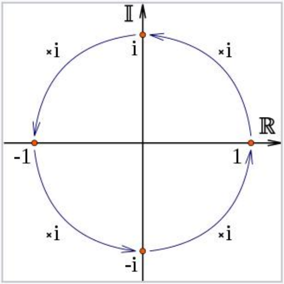
$$i^3 = i^2 . i = -i$$

$$i^4 = i^3 . i = 1$$

$$i^5 = i^4 . i = i$$

Cómo podemos averiguar cualquier potencia natural de i? Usando el resto de la división por 4. Por ejemplo, $514 = 128 \cdot 4 + 2$ osea que

$$i^{514} = (i^4)^{128} i^2 = (1)^{128}(-1) = -1$$



Como $i = e^{i\,\pi/2}$, el producto por i *avanza* ángulos $\pi/2$.

Potencias de complejos

Multiplicando un complejo por si mismo, las potencias, con $n \in \mathbb{N}$, son

$$z^n = \left(|z|e^{i\alpha}\right)^n = |z|^n e^{i\alpha\, n}$$

Practiquemos! Calcular y decir en que cuadrante se halla el resultado:

$a)\ (3e^{i\pi/4})^4$

$b)\ (1+i)^{-20}$

$c)\ (1-i)^{11}$

$d)\ (-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i)^{-8}$

Potencias de complejos

Multiplicando un complejo por si mismo, las potencias, con $n \in \mathbb{N}$, son

$$z^n = |z|^n e^{i\alpha\, n} = |z|^n \left(\cos(n\,\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\,\alpha)\right)$$

Practiquemos! Calcular y decir en que cuadrante se halla el resultado:

$a)$ $(3e^{i\pi/4})^4 = -81$ cuadrante II

$b)$ $(1+i)^{-20} = -2^{-10}$ cuadrante II

$c)$ $(1-i)^{11} = -32 - 32i$ cuadrante III

$d)$ $(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i)^{-8} = -0.021 + i0.014$ cuadrante II

Como problema inverso a la potencia aparece la *radicación*: se quiere resolver z tal que $z^n = w$.

Vimos para las potencias

$$z^n = |z|^n e^{i\alpha\, n} = |z|^n e^{i\alpha\, n + \text{vueltas completas que no afectan}}$$

Radicación: se quiere resolver z tal que $z^n = w$

Es sencillo deducir una fórmula para las raíces,

Si $w = |w|e^{i\alpha} = |w|e^{i(\alpha + k\,2\pi)}$, tenemos $\boxed{z = w^{1/n} = \left(|w|e^{i(\alpha+k\,2\pi)}\right)^{\frac{1}{n}}}$

aunque en principio $k \in \mathbb{Z}$, no hay infinitos resultados!

Para $k = 0, 1 \ldots n-1$ se obtienen valores diferentes, luego se repiten.

De Moivre

Raíces n-ésimas

Si $w \in \mathbb{C}$, con $w \neq 0$, una raíz n-ésima de w es un número $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$z^n = w$$

La expresión hallada por De Moivre permite, dado w, hallar sus raíces n-ésimas:

$$z_k = |w|^{1/n} \exp\left(i\,\frac{\arg(w)+k2\pi}{n}\right)$$

para los enteros $0 \leq k \leq n-1$; donde el subíndice es para diferenciarlas.

- Cada raiz z_k cumple $(z_k)^n = w$ (puede verificarlo facilmente).
- Aplicando la fórmula se hallan un total de n raíces.
- Vemos que en módulo $|z_k| = |w|^{1/n}$ no depende de k, pero sí el argumento $\arg(z_k) = \frac{\arg(w)+k2\pi}{n}$.

- Observemos que el ángulo entre dos raíces n-ésimas consecutivas es fijo

$$\arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = \frac{\arg(w) + k2\pi}{n} - \frac{\arg(w) + (k-1)2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

- Para el valor del módulo, podemos usar la calculadora, porque $|w|^{1/n} = \sqrt[n]{|w|}$ es un número real positivo.

- Como el módulo de las raíces no depende de k, las raices son números ubicados en un círculo y separados por un ángulo constante (quedará más claro en el ejemplo).

- Si $w = |w|e^{i\,\alpha}$, la forma binómica para la k-ésima raíz queda

$$z_k = |w|^{1/n}\left(\cos\left(\tfrac{\alpha+k2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha+k2\pi}{n}\right)\right)$$

Ejemplo

Cuando $n = 2$, la separación será de un ángulo π y por eso queda una raíz y la misma cambiada de signo ($z_1 = -z_0$, o con $\pm$ para indicar las dos).

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene en $\mathbb{C}$ dos valores, las raíces cuadradas de

$$w = -1 = 1e^{i\pi}$$

son, de acuerdo a la fórmula de De Moivre, $\begin{cases} z_0 = 1e^{i\frac{\pi+0}{2}} & = i \\ z_1 = 1e^{i\frac{\pi+2\pi}{2}} & = -i \end{cases}$

El resultado es acorde con la factorización por diferencia de cuadrados

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

Ejemplo: raíces cúbicas de un complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de -27.

Solución En forma polar, $-27 = 27(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Se tiene que las raíces cúbicas de -27 están dadas por

$$(-27)^{1/3} = 27^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \quad \text{para } k = 0, 1, 2$$

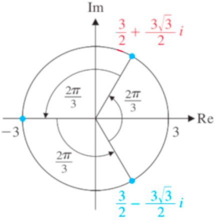
Al usar la fórmula con $n = 3$, se obtiene

$$z_0 = 27^{1/3}\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right] = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_1 = 27^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right)\right] = 3(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -3$$

$$z_2 = 27^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right)\right] = 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

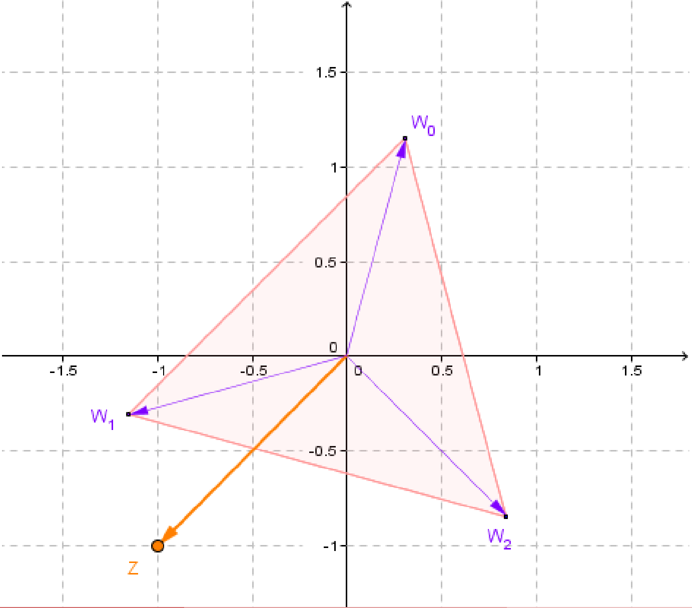


Las raíces cúbicas de -27

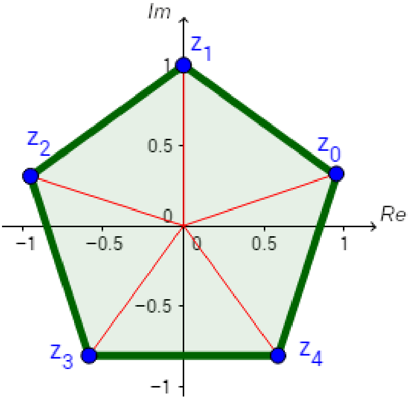
Las tres raíces cúbicas de -27 están igualmente espaciadas $2\pi/3$ radianes $(120°)$ y situadas en un círculo de radio 3 con centro en el origen.

Ejemplo: raíces cúbicas de otro complejo

Para $z = -1 - i$ las raíces cúbicas, que en este caso le llamaron w_0, w_1 y w_2 son:



¿Qué diríamos en este caso? Interpretar el gráfico:



Son las raíces de, por ejemplo, $p(x) = 3(x^5 - i)$.

Aplicación a polinomios: búsqueda de raíces y factorización

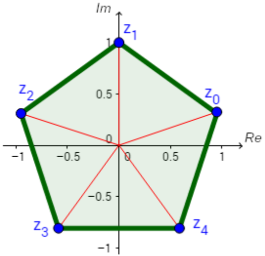
Con la fórmula de De Moivre, se pueden hallar todas las raíces para cualquier polinomio que sea de la forma $p(x) = a\,x^n + b$.

El teorema del resto dice que el resto de la división de p por $(x - z)$ es igual a $p(z)$, y permite afirmar que

z es raíz de p sí y solo si $(x - z)$ divide en forma exacta a $p(x)$.

Ejemplo

Para $p(x) = 3(x^5 - i)$, sus raíces son los valores del gráfico:



Estos valores complejos los podemos ordenar así

$$\begin{aligned} z_0 &= \quad 0.95106 + 0.30902i \\ z_1 &= \quad i \\ z_2 &= \quad -0.95106 + 0.30902i \\ z_3 &= \quad -0.58779 - 0.80902i \\ z_4 &= \quad 0.58779 - 0.80902i \end{aligned}$$

Conocidos los valores de z tal que $p(z) = 0$, entonces

$$p(x) = 3(x^5 - i) = 3(x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)$$

Aplicación a polinomios: búsqueda de raíces y factorización

Al dividir polinomios, el resto es un polinomio de grado menor al del divisor, en el caso particular de la división de p por $(x - z)$, dicho resto es igual a $p(z)$, y permite decir que

z es raíz de p sí y solo si $(x - z)$ divide en forma exacta a $p(x)$.

Esta afirmación se relaciona con el teorema del resto [1].

Veamos un ejemplo:

Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 - 7$.

Al dividir $p(x)$ por $x - 2$ obtenemos el cociente

$c(x) = x^2 - x - 2$ y el resto $r = -11$.

Podemos asegurar entonces, que $p(2) = -11$,

[1] En otras palabras: si dividimos un polinomio P(x) entre el binomio (x-a), el resto de la división es igual al valor numérico de evaluar el polinomio en a, osea P(a).

z es raíz de $p \Leftrightarrow (x - z)$ divide en forma exacta a $p(x)$

Esto nos indica que si z es raíz de p podemos factorizar

$$p(x) = (x - z)q(x)$$

En donde $gr\,(q) = gr\,(p) - 1$.

Pero si también se obtiene que el cociente $q(z) = 0 \Rightarrow$ puedo dividir nuevamente por $(x - z)$, y bajar más el grado del polinomio al que faltan buscarle las raíces.

Multiplicidad de una raíz

Definición

Dado un polinomio p, diremos que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de p (con $k \in \mathbb{N}$) si

$$p(x) = (x - z)^k q(x)$$

con q un polinomio tal que $q(z) \neq 0$.

Si un polinomio $s(x)$ no se puede factorizar como producto de otros, se dice polinomio irreducible. Cobra importancia el conjunto donde se aplicará, siendo más general si el dominio es $\mathbb{C}$, que si es $\mathbb{R}$.

Si la multiplicidad de un raíz vale $k = 1$ se dice que es una raíz *simple*.

Ejemplos

En estos dos primeros ejemplos se reconoce el cuadrado de un binomio

$$x^2 + 14x + 49 \rightarrow \text{raíz doble} \;\; z = -7$$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2 \rightarrow \text{raíz doble} \;\; z = +\frac{2}{3}$$

$$x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6) \rightarrow \text{raíces simples } z_1 = -4\,;\, z_2 = -6$$

Un ejemplo de polinomio irreducible en $\mathbb{R}[x]$ puede ser $s(x) = x^2 + 1$ mientras que en los complejos ya vimos cómo se lo puede factorizar.

Las cuatro raíces de $p(x) = x^4 + 4$ pueden usarse para factorizar $p(x)$ en factores cuadráticos con coeficientes reales. Se obtiene
$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

*bicuadrática

En un polinomio particular donde aparezcan potencias 0, 2 y 4 de la incógnita:

$$q^4 + 3q^2 - 4 = 0$$

como en el caso anterior, es usual introducir una variable auxiliar $x = q^2$
que ayuda a resolver, pasando de la ecuación de cuarto grado a una cuadrática, $x^2 + 3x - 4 = 0$.
Luego de resolverla, se calculan los valores de la incógnita original, q.

Ecuaciones de segundo grado - Bhaskara

En una ecuación cuadrática más general $ax^2 + bx + c = 0$, decíamos que no tenía solución si el valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

En los complejos, cuando $\Delta \in \mathbb{R}^-$ se hace $\pm\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|}$.

Con la fórmula de Baskhara tenemos forma de obtener las raíces de cualquier polinomio de grado 2, incluso si Δ no es real. Muchas veces se usan otras identidades matemáticas para intentar evitar errores de redondeo.

Ejemplo:
$p(x) = x^2 - 4x + 9$ y se necesita hallar sus raíces.
Compruebe que las mismas son simples y vienen dadas por $z_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Un teorema práctico

- Dado un polinomio p con todos sus coeficientes reales:
  si $z \in \mathbb{C}$ con $Im(z) \neq 0$ es raíz de p entonces su conjugado, $\overline{z}$, es también raíz de p.

Esto hace que p sea factorizable por

$$(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$$

que es de segundo grado y con coeficientes reales.

Ejemplo:
Considere $p(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x - 10$ con la información que $p(3 - i) = 0$.

Segundo teorema útil: raíces del polinomio derivado

Dado $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ se llama polinomio derivado de p a: $\partial p(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, a_j x^{j-1}$ el cual coincide con la definición que se hace en análisis matemático.

Designamos el derivado m veces: $\partial^m p = \partial(\partial^{(m-1)} p) = \underbrace{\partial(\partial(\cdots(\partial}_{m \text{ veces}}\, p)\cdots))$

- $z \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de p sí y solo si $p(z) = \partial(p(z)) = \partial^2 p(z) = \cdots = \partial^{k-1} p(z) = 0$ pero $\partial^k p(z) \neq 0$, osea, z es raíz del polimio derivado, del derivado segundo, ... hasta del derivado $(k-1)$ veces.

Ejemplo:
Sabiendo que 2 es raiz de $16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$ expresarlo como producto de factores de la forma $(x - Z)$.

Al factorizar completamente un polinomio con $gr\,p = n$ como producto de polinomios irreducibles estamos dejando a la vista todas las raíces de p y sus correspondientes multiplicidades.
Para un polinomio en $\mathbb{C}$ se puede escribir

$$p(x) = a_n(x - z_1)^{k_1}(x - z_2)^{k_2} \cdots (x - z_r)^{k_r}$$

donde $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$

TFA

El Teorema Fundamental del Álgebra [a] dice: cualquier polinomio de grado n tiene **exactamente** n raíces (contadas con sus multiplicidades).
Si los coeficientes y dominio de p se restringen a $\mathbb{R}$, entonces p tiene *a lo sumo* n raíces.

[a] uno de sus posibles enunciados, varía un poco según la referencia

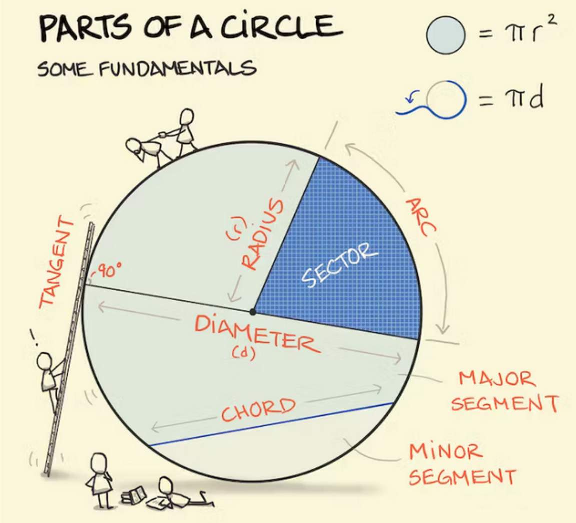
Ej: El polinomio $q(\lambda) = (\lambda - 1)^5$ tiene raíz 1 con multiplicidad 5 y a eso se refiere "*contadas con su multiplicidad*".

Fin de la unidad 6

Existen algunos trucos más cuando los coeficientes son números enteros.

Salvo para los casos que mostramos, **no contamos con una regla de resolución general para las raíces de polinomios de grado arbitrario**, por eso en muchos de los ejercicios que proponemos se da alguna raíz como ayuda; y si no es así, probablemente se trate de aplicar alguna de las reglas de factoreo.

Por si acaso:



(chord = cuerda)