Unidad 5: Transformaciones lineales

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son una clase de funciones. Este tipo de función tiene la particularidad de que su dominio V y su codominio W son espacios vectoriales. Además se pide que cumpla con ciertas condiciones que hacen a la linealidad, así que hay que mencionar a los escalares (o números reales) y la suma en cada uno de esos espacios.

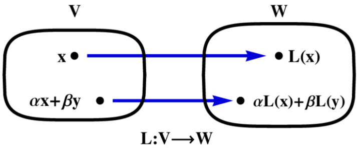
Definición

Sean V espacio y W espacios vectoriales, una transformación lineal $T : V \to W$ entre ellos es una función que satisface:

- si $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2} \in V$, $T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = T(\mathbf{v_1}) + T(\mathbf{v_2})$
- si $\mathbf{v} \in V$ y $c \in \mathbb{R}$, $T(c\mathbf{v}) = c\,T(\mathbf{v})$

Las transformaciones lineales desempeñan un papel muy importante en Matemática, Física, Ingeniería, procesamiento de imágenes, y muchas otras áreas de la ciencia.

Esquema (conjuntos = espacios) y algunas propiedades que se desprenden de la definición:



- La definición se extiende facilmente para valer con cualquier suma y producto por escalares, de modo que la transformación lineal de una combinación lineal

$$L(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n) = a_1L(\vec{v}_1) + a_2L(\vec{v}_2) + ... + a_nL(\vec{v}_n)$$

- $L(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$
  Se resaltó con un indice para diferenciar explicitamente los ceros de cada espacio, normalmente no hace falta escribirlo.
- Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son ambas transformaciones lineales entonces la composición $g \circ f : V \to U$ es también una transformación lineal

Ejemplo 1 de transformación lineal

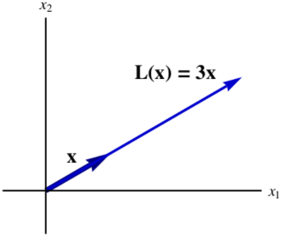
Si $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$, definimos, como primer ejemplo,

$$L(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

L es una transformación lineal, ya que

$$\begin{aligned} L(\alpha\mathbf{x}) &= 3(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(3\mathbf{x}) = \alpha L(\mathbf{x}) \\ L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= 3(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 3\mathbf{x}+3\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

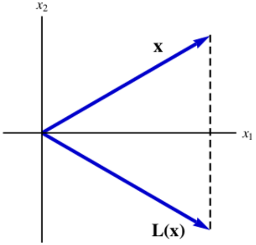
verificándose que $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Geométricamente, L tiene el efecto de "dilatar" el vector $\mathbf{x}$, multiplicando su longitud por un factor 3 y conservando su dirección y sentido:



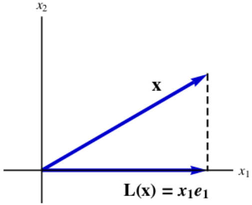
Si el factor de escalado (3 en este caso) es mayor a 1 se tiene una dilatación, si es un valor en $(0, 1)$, es una contracción.

Ejemplo 2 de transformaciones lineales

Estos son más fáciles de visualizar en $\mathbb{R}^2$ pero tienen su análogo en $\mathbb{R}^n$. El eje con respecto al cual se hacen las transformación de reflexión y proyección, puede ser cualquiera. En cambio la inversión cambia el signo de todas las componentes del vector.

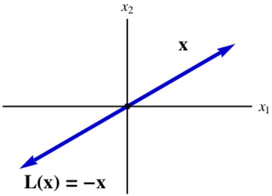


Reflexión respecto del eje x.

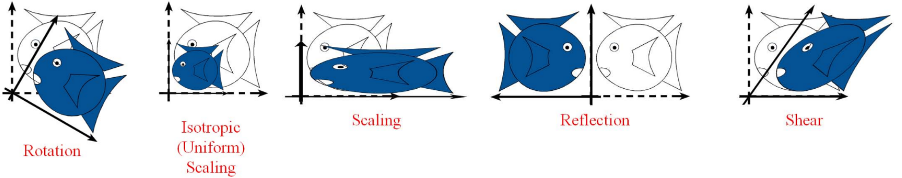


Proyección ortogonal sobre el eje x.

Inversión.



Linear transformation



Courtesy of Prof. Fredo Durand. Used with permission.

El esquema da una idea para imágenes, pero lo que resulta más fácil de recordar es que todas las líneas rectas en el dominio se mapean mediante una transformación lineal a otras líneas rectas, mientras que el origen permanece fijo.

Matriz de una transformación lineal

Transformación definida por una matriz A.
Dada una matriz A de $m \times n$, se puede definir una transformación lineal asociada $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$\boxed{L(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}}$$

Es fácil ver que L cumple las propiedades de linealidad:

$$\begin{aligned} L(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \\ &= \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y} \\ &= \alpha L(\mathbf{x}) + \beta L(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier matriz A de $m \times n$ puede verse como asociada a una transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Más aun, **toda** transformación lineal
$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de la forma anterior (para alguna matriz A de $m \times n$).

Transformaciones y matrices en dimensión finita $(\dim V = n, \dim W = m)$

La transformación lineal de una combinación lineal de vectores cumple

$$T(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n) = a_1T(\vec{v}_1) + a_2T(\vec{v}_2) + ... + a_nT(\vec{v}_n)$$

lo que en física, se suele llamar *principio de superposición*.

Si los vectores que estamos combinando forman una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ para V, entonces, conociendo sus transformados

$$\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \cdots, T(\mathbf{v}_n)\}$$

tenemos toda la información para transformar **cualquier vector** $\mathbf{v} \in V$

Matriz asociada a una transformación lineal

Si coleccionamos en las columnas de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ los coordenadas de $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \cdots, T(\mathbf{v}_n)$ con respecto a una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_m\}$ del espacio W tendremos toda la información de la transformación como para poder aplicarla directamente sobre coeficientes, arreglados como columna.

$$
\begin{array}{ll}
T(\mathbf{v_1}) = A_{11}\mathbf{w_1} + A_{21}\mathbf{w_2} + \cdots A_{m1}\mathbf{w}_m & \text{columna 1 de } A \\
T(\mathbf{v_2}) = A_{12}\mathbf{w_1} + A_{22}\mathbf{w_2} + \cdots A_{m2}\mathbf{w}_m & \text{columna 2 de } A \\
\vdots & \\
T(\mathbf{v_n}) = A_{1n}\mathbf{w_1} + A_{2n}\mathbf{w_2} + \cdots A_{mn}\mathbf{w}_m & \text{columna n de } A
\end{array}
$$

Esquemáticamente, usando las coordenadas a_i de $\mathbf{v}$ se tiene

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{v_1}) & \mathbf{T}(\mathbf{v_2}) & \cdots & \mathbf{T}(\mathbf{v_n}) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{m\times n}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{v}) \\ \downarrow \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

- Es fácil convencerse que entonces la imagen de la transformación lineal es el subespacio generado por las columnas de su matriz.
- Si no hay información sobre alguna base en particular, se sobreentiende que son bases canónicas.

  Más en general, informando las bases, tenemos

$$A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}'}$$

Ejemplo, matriz de una transformación lineal .

Veamos un ejemplo donde dominio y codominio son diferentes.

Sea $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Se verifica fácilmente que L es lineal (¡probar!) y que puede ser escrita también como

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La construcción de la matriz , como no menciona bases en particular, se ha hecho con las bases estándar o canónicas. $T(\mathbf{e_1}) = T(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y

$T(\mathbf{e_2}) = T(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; las columnas de la matriz.

Matrices de ejemplos previos

Las transformaciones con dominio y codominio $\mathbb{R}^2$ que graficamos antes: transformación de reflexión respecto al eje y, proyección sobre la dirección del eje x, e inversión tienen respectivamente estas matrices

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se reserva la letra I para la identidad, que sería la matriz de una transformación que no modifica al vector: $I\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

A diferencia de las que comentamos en esta página, incluso si trabajamos en $\mathbb{R}^2$, muchas veces las transformaciones lineales no cuentan con una interpretación geométrica.

Ejemp'

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

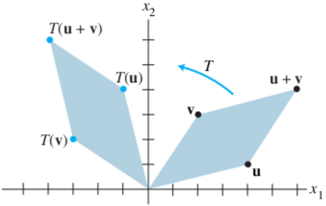
Encuentre las imágenes bajo T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

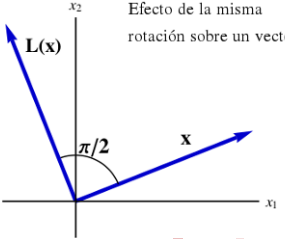
Solución

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Observe que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ es, desde luego, igual a $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. En la figura parece que T hace girar $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ un ángulo de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj. De hecho, T transforma el paralelogramo completo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en otro determinado por $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

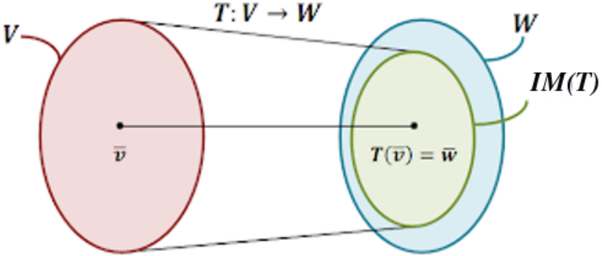




Efecto de la misma rotación sobre un vector.

Subespacios relacionados a una transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
Esquema como función



La **imagen** de T es el conjunto

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W / \mathbf{w} = T(\mathbf{v}),\ \text{con } \mathbf{v} \in V\}.$$

Ejemplo

1. Supongamos que A es la matriz de una transformación lineal T desde y hacia $\mathbb{R}^3$, donde la transformación multiplica por A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine si $\vec{w} = (1, -1, 2) \in Im(T)$.

En otras palabras ¿$\exists \vec{v}$ tal que $\vec{w} = T(\vec{v})$?

Rta: Estudiamos $(A|\vec{w})$ y reduciendo la matriz del sistema llegamos a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Como es incompatible, quiere decir que $\vec{w} \notin Im(T)$.

Investiguemos el conjunto imagen, $Im(T)$

Mantenemos $T : V \to W$.
Por un lado, como $\vec{0} = T(\vec{0})$ se cumple $\vec{0} \in Im(T)$.

Luego, elegimos en el conjunto $Im(T)$ dos vectores cualquiera $\vec{w}$, $\vec{z}$ y un escalar $c \in \mathbb{R}$.

$\vec{w} \in Im(T) \Rightarrow \vec{w} = T(\vec{v_w})$ para algún $\vec{v_w} \in V$

$\vec{z} \in Im(T) \Rightarrow \vec{z} = T(\vec{v_z})$ para un vector $\vec{v_z} \in V$.

También es correcto $\vec{z} \in Im(T) \Rightarrow \exists\, \vec{v_z} \in V$ tal que $\vec{z} = T(\vec{v_z})$.

$$\vec{w} + c\vec{z} = T(\vec{v_w}) + cT(\vec{v_z}) = T(\vec{v_w} + c\,\vec{v_z})$$

y como V es espacio, $\vec{v_w} + c\,\vec{v_z} \in V \;\Rightarrow\; \vec{w} + c\vec{z} \in Im(T)$

De esa forma se verifica que $\vec{w} + c\vec{z}$ es también un vector de $Im(T)$, con lo cual la suma y el producto por escalares son operaciones cerradas en el conjunto $Im(T)$.

`La imagen de una transformación lineal es un subespacio de su codominio.`

Ejemplo pequeño

Al hacer esta multiplicación matriz por vector

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 1b \\ -2a + 4b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

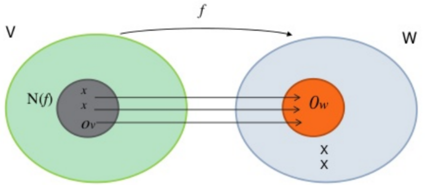
estamos combinando los vectores columna de A, que en este caso, son LI, y que podrían ser de una transformación lineal T, que

$$T(\hat{\mathbf{i}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(\hat{\mathbf{j}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A su vez $T(a, b) = aT(\hat{\mathbf{i}}) + bT(\hat{\mathbf{j}})$

Otro subespacio relacionado a una transformación lineal

Retomemos el esquema: con la notación $T : V \to W$, se tiene $V = dom(T)$.



- **Núcleo** es el conjunto $Nu(T) = \{\vec{v} \in V / T(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Esto es todos los vectores que son transformados o enviados al vector nulo.

Como $\vec{0} = T(\vec{0})$ se cumple $\vec{0} \in Nu(T)$: El núcleo nunca es un conjunto vacío! aunque puede pasar que solo contenga al vector cero. Es fácil ver que cualquier combinación lineal de vectores del núcleo dá un nuevo vector del núcleo.

$Nu(T)$ `es un subespacio del dominio de` T.

En algunos textos se llama nulidad de la transformación lineal a la dimensión de su núcleo.

Ejemplo

1. Supongamos que A es la matriz de una transformación lineal desde y hacia $\mathbb{R}^3$, donde la transformación multiplica por A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine si $\vec{w} = (1, -1, 2)$ está en el subespacio $Nu(T)$.

Rta: Como $A\vec{w} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{w} \notin Nu(A)$.

Núcleo e Imagen y la matriz de una transformación lineal

Si estamos trabajando con la matriz A asociada a una transformación lineal T y buscamos hallar

a) el núcleo, notar que estamos ante un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

b) la imagen: es el subespacio que generan las columnas de A. Para quedarnos solo con las columnas que son LI (base de la imagen), nos ayudamos con la forma reducida y escalonada de A:

$$\text{rango}(A) = \dim\ (Im(T))$$

Advertimos que el rango dice cuántas pero no cuales de las columnas.

Ejemplo: Nu(T) e Im(T) a partir de la matriz

Sea la matriz asociada a una transformación lineal $E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ya está reducida y escalonada. Las ecuaciones para el núcleo que se obtienen de esta matriz (ampliada con $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$) son

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow Nu(E) = \{(x_1, -2\,x_3, x_3, 0),\ x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Como $(x_1, -2\,x_3, x_3, 0) = x_1(1,0,0,0) + x_3(0,-2,1,0)$ y esos dos vectores son LI, forman una base $\mathcal{B}_{Nu(E)} = \{(1,0,0,0),(0,-2,1,0)\} \Rightarrow$ dim$(Nu(E))$=2.

Ejemplo: continuación

Vemos que rango(E)=2. ¿Cuales dos columnas sería recomendable elegir para posible base $\mathcal{B}_{Im(E)}$?

$$\begin{array}{cccc} & \downarrow & & \downarrow \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \text{ ya que tienen los 1 principales}$$

será fácil ver que $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es un conjunto LI, ya que son dos de los versores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como el dominio de E es $\mathbb{R}^4$, se verifica

$$\begin{array}{rcll} dim(dom(E)) & = & dim(Nu(E)) & +dim(Im(E)) \\ 4 & = & 2 & +2. \end{array}$$

De hecho la $Im(E) = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$ es fácil de interpretar geométricamente, es el plano $z = 0$.

Posible problema del ejemplo

EJEMPLO **Transformación de un vector de producción en un vector de materia prima**

Un fabricante elabora cuatro tipos de productos distintos, de los cuales cada uno requiere tres tipos de materiales. Se identifican los cuatro productos como P_1, P_2, P_3 y P_4, y a los materiales por R_1, R_2 y R_3. La tabla siguiente muestra el número de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar una unidad de cada producto.

	Productos necesarios para producir una unidad de cada producto				
Número de unidades de materia prima		P_1	P_2	P_3	P_4
	R_1	2	1	3	4
	R_2	4	2	2	1
	R_3	3	3	1	2

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con otros números, no equivale a E.

Teorema de la dimensión

El teorema de las dimensión establece una relación aritmética sencilla entre la dimensión del dominio y las dimensiones del núcleo y de la imagen de una transformación lineal $F : V \to W$. Si los espacios en juego tienen dimensión finita se cumple:

$$\dim(\mathrm{dom}(F)) = \dim(Nu(F)) + \dim(Im(F))$$

Nomenclatura de transformaciones lineales

Así como a las transformaciones lineales se les suele llamar operadores lineales, se usan también estos términos para sus propiedades como funciones:

Definición: Decimos que una transformación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es:

- *monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$.
- *epimorfismo* si es suryectiva
- *isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

$$F \text{ es inyectiva (monomorfimo)} \Leftrightarrow Nu\,(F) = \{0_V\}$$

$$F : V \to W \text{ es sobreyectiva (epimorfismo)} \Leftrightarrow Im\,(F) = W$$

Por supuesto, hay transformaciones lineales que no cumplen ninguna de estas clasificaciones.

Espacios vectoriales isomorfos

De las nomenclaturas presentadas, la más importante es identificar una transformación lineal que es un isomorfismo $f : V \to W$ entre dos espacios, porque al poder establecer una transformación *uno a uno*, es posible encontrar una transformación lineal INVERSA (con la misma idea que con funciones inversas), osea tiene sentido $f^{-1} : W \to V$ de modo que $f^{-1} \circ f$ sea la identidad.

- Se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo $T : V \to W$.
- En dimensión finita, se tiene que $dim(V) = dim(W)$ cuando los espacios son isomorfos.
- En ese caso, la matriz de T, en cualquier base, será cuadrada e inversible.

Ampliamos lo que sabíamos

Todo demostrable (teorema)

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, son equivalentes:

- A es inversible.
- $Ax = b$ tiene solución única, cualquiera sea $b \in \mathbb{R}^n$.
- En particular, $Ax = 0$ tiene únicamente la solución trivial. Luego, como transformación lineal , $Nu(A) = \{\vec{0}\}$
- A es equivalente por filas a $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- A corresponde a una transformación lineal que es un isomorfismo.

Ejemplo:

Plantear una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T((2,1)) = (1,2)$ y $T((-1,0)) = (1,1)$. Dar una expresión para $T(x,y)$.

Notamos que la matriz asociada a la transformación lineal es 2×2. Para hallarla, sabemos cómo opera T sobre los dos vectores que se dan en el enunciado, que como son L.I. (una base de $\mathbb{R}^2$) nos permiten expresar los de la base canónica:

$$\begin{aligned}(1,0) &= -(-1,0) + 0(2,1)\\ (0,1) &= 2(-1,0) + 1(2,1)\end{aligned}$$

Entonces $\begin{cases} T((1,0)) = -T((-1,0)) = -(1,1) = (-1,-1) \\ T((0,1)) = 2T((-1,0)) + T((2,1)) = 2(1,1) + (1,2) = (3,4) \end{cases}$

Por lo que podemos construir la matriz de T en la base canónica,$\mathcal{B}_c$, digamos que se llama A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3y \\ -x+4y \end{pmatrix}$$

La imagen es: Im(T)=$\langle(-1,-1),(3,4)\rangle$; y Nu($T$)=$\{\vec{0}\}$.

Cambio de base $\dim V < \infty$

Como sabemos: dado un espacio vectorial, existen muchas posibles bases para elegir, ya que en un espacio vectorial de dimensión n, cualesquiera n vectores, linealmente independientes, forman una base.

Podemos interpretar que un **cambio de base** es una transformación lineal que es un isomorfismo dentro del mismo espacio $T : V \to V$.
Su matriz se llama de cambio de base o de transición.

Ejemplo, cambio de base por rotación, en $\mathbb{R}^2$

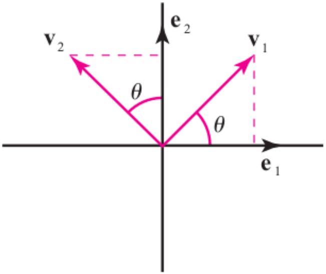
Sea $\theta \in (0, 2\pi)$ un número real fijo. Consideremos los vectores unitarios $\vec{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $\vec{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Queremos saber si este conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

La combinación lineal nula $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = \mathbf{0}$ nos lleva a analizar esta matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_\theta) = 1.$$

Al ser A_θ una matriz cuadrada con $\det(A_\theta) \neq 0$ sus columnas son LI $\Rightarrow$ el conjunto $\mathcal{B}_\theta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Graficamente las bases tienen tienen distintas orientaciones.



Ejemplo

Si conocemos la coordenadas de un vector $\mathbf{v}$ en esa base $\mathcal{B}_\theta$, la utilidad de A_θ será la transición, dar las coordenadas en la base canónica sin modificar* $\mathbf{v}$.

Si $[\mathbf{v}]_\theta = (x', y')$ para hallar las coordenadas del mismo en la base canónica hacemos

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_c} = A_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

como columna para poder multiplicar.

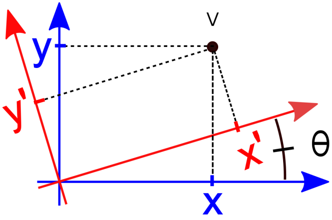
* Como al vector no lo modifica, el cambio de base es la "transformación identidad". Toma las coordenadas en una base y las devuelve en otra.

El resultado es

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_c} = (x' \cos\theta - y' \sin\theta, x' \sin\theta + y' \cos\theta) = (x, y)$$

donde (x, y) tiene el significado usual.

Rotación en $\mathbb{R}^2$



Pensamos que cambia la base, no el vector

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_c} = (x, y)$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_\theta} = (x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La particularidad de

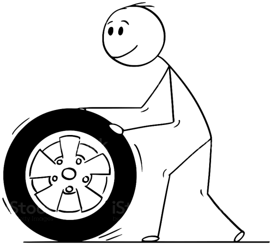
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

es que el efecto contrario, o su inversa es simple de conseguir.

$$A_\theta^{-1} = A_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Comprobando

$$
\begin{aligned}
R_{-\theta}R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \, .
\end{aligned}
$$



Podemos obtener las fórmulas trigonométricas clásicas para el coseno y el seno de la suma de ángulos como consecuencia de la composición de funciones y la multiplicación de matrices. Es claro que si rotamos un ángulo β y despues un ángulo α, habremos rotado un ángulo $\alpha+\beta$. Asi que

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}\ .$$

Pero por otro lado, al multiplicar las matrices tenemos

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

pues si dos matrices coinciden ($R_{\alpha+\beta}$ y $R_\alpha R_\beta$) lo hacen entrada por entrada.

Si primero se rota en un sentido y luego en otro, obtendremos

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

Rotaciones en $\mathbb{R}^3$

Las siguientes matrices de rotación realizan rotaciones de vectores alrededor de los ejes x, y, ó z, en el espacio de tres dimensiones, en sentido antihorario alrededor del eje, considerando un sistema de coordenadas con la regla de la mano derecha.

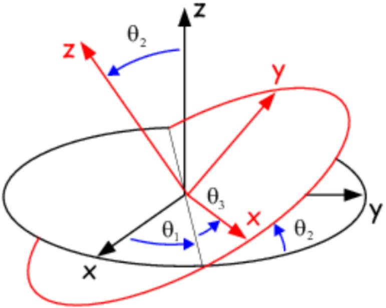
$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

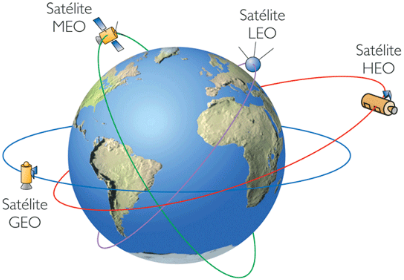
$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotaciones en $\mathbb{R}^3$

Si la dirección en torno a la cual se rota es arbitraria (no coincide con un eje), comprender la composición de transformaciones lineales será importante





Utilidad de la matriz cambio de base

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

a) Si $[u]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ calcular $[u]_{B_2}$

Según la propiedad de la matriz de cambio de base:

$$P.\,[u]_{B_1} = [u]_{B_2} \Rightarrow \; [u]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

¿Podemos determinar cuál es el vector u? No, porque no tenemos información sobre las bases.

Notación que ayuda a comprender las bases que intervienen

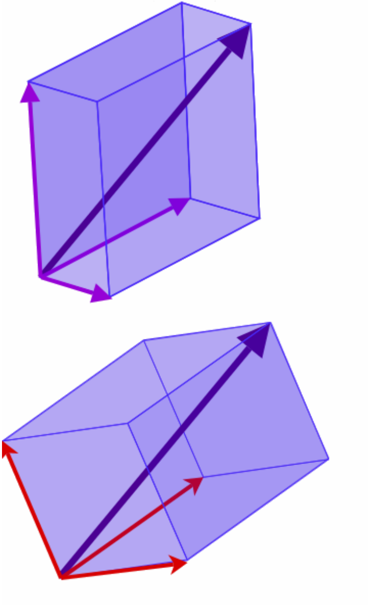


Figura: El mismo vector representado por dos bases diferentes (flechas violetas y rojas).

Nuevamente, pensamos que cambia la base, no el vector

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = (x', y', z')$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [I]_{B\,B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = [I]_{B'\,B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

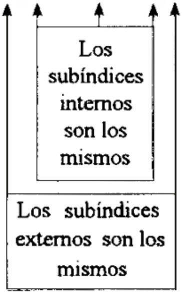
La transición es entre dos bases cualquiera. Se cumple $[I]_{B\,B'} = [I]^{-1}_{B'\,B}$.

Caso particular de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

En este apartado nos interesa estudiar cuál es la relación entre dos matrices asociadas a una misma transformación lineal, pero que están expresadas en bases diferentes.
En adelante, cuando demos la matriz con mención a una sola base, quiere decir que toma las coordenadas en una base, transforma al vector, y da el resultado en esa misma base.

¿Cómo afecta un cambio de base a la matriz asociada a una transformación lineal ?

$$[T]_{B'} = [I]_{B' \, B}[T]_B[I]_{B \, B'}$$



Ref. Anton, p. 497 en la 5ta ed.

Ejemplo: otro cambio de base útil

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Halle la matriz de T en la base $B' = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$, donde $\vec{u_1} = (1, 1)$ y $\vec{u_2} = (1, 2)$.

En la base estandard es $[T]_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ pero en la base prima

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es más *simple* porque las matrices diagonal poseen propiedades útiles que no cumplen las matrices más en general.
Más adelante aprenderemos cómo se hace esto que se conoce como diagonalización de matrices.

Semejanza

Definición

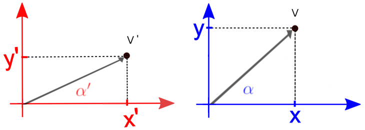
Si A y B son dos matrices cuadradas, se dice que B es **semejante** a A si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

B es semejante a A sí, y solo si, A es semejante a B.

Dos matrices que representan al mismo endomorfismo $(T : V \to V)$ en distintas bases son semejantes.

Algunas propiedades, como el valor del determinante, son invariantes bajo semejanza.

Apéndice: volvemos a la matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$



Separemos la gráfica que hemos mostrado antes. Tenemos que el vector $\vec{v}$ forma un ángulo α respecto al eje x. Luego de aplicar $[I]_{B'\,B} = A_{-\theta}$ graficamos en los nuevos ejes (rojos) el nuevo vector tiene asociado un ángulo α' desde el eje x'.

Como vimos

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_c} = (x, y) = (x' \cos\theta - y' \sin\theta, x' \sin\theta + y' \cos\theta)$$

Queremos convencernos del efecto de la rotación. Por un lado $||\mathbf{v}||^2 = x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
||\mathbf{v}'||^2 &= (x'^2 + y'^2) \\
&= (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 \\
&= x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta \\
&= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\cos^2\theta + \sin^2) \\
&= x^2 + y^2 = ||\mathbf{v}||^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto la longitud o norma del vector no cambia al aplicar el cambio de base a B'.

Primero escribimos el transformado y luego reemplazamos que $x = ||\vec{v}|| \cos\alpha$ y $y = ||\vec{v}|| \sin\alpha$ que es la descomposición usual. Además se usan identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned} ||\vec{v'}|| \cos\alpha' = x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ &= ||\vec{v}|| \cos\alpha\cos\theta + ||\vec{v}|| \sin\alpha\sin\theta \\ &= ||\vec{v}||(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) \\ &= ||\vec{v}|| \cos(\alpha-\theta) \\ & \Rightarrow \cos\alpha' = \cos(\alpha-\theta) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ||\vec{v'}|| \sin\alpha' = y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ &= -||\vec{v}|| \cos\alpha\sin\theta + ||\vec{v}|| \sin\alpha\cos\theta \\ &= ||\vec{v}||(-\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) \\ &= ||\vec{v}|| \sin(\alpha-\theta) \\ & \Rightarrow \sin\alpha' = \sin(\alpha-\theta) \end{aligned}$$

La única posibilidad, cuando coinciden tanto seno como coseno de un ángulo es concluir que $\alpha' = \alpha - \theta$. Finalmente, hemos comprobado que el cambio de coordenadas entre B' y B_c devuelve un nuevo vector que mide lo mismo y se encuentra a un ángulo θ del original.