Unidad 4: Espacios vectoriales

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

Ejemplo motivador: sistema de control

Los sistemas de control de vuelo envían una corriente de comandos a las superficies de control aerodinámicas y a 44 pequeños impulsores de propulsión a chorro. En la figura 1 se muestra un típico sistema con retroalimentación en ciclo cerrado que controla el ángulo de inclinación de la punta de la nariz del transbordador durante el vuelo. Los símbolos de empalme (⊗) muestran dónde se añaden las señales de diversos sensores a las señales de la computadora que fluyen por la parte superior de la figura.

Matemáticamente, las señales de entrada y salida de un sistema de control son funciones. Es importante, para las aplicaciones, que estas señales puedan sumarse, como en la figura 1, y multiplicarse por escalares. Estas dos operaciones con funciones tienen propiedades algebraicas completamente análogas a las operaciones de suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ y multiplicación de un vector por un escalar.

Por esta razón, al conjunto de todas las posibles entradas (funciones) se le denomina *espacio vectorial*. Los fundamentos matemáticos de la ingeniería de sistemas descansan sobre los espacios vectoriales y las funciones,

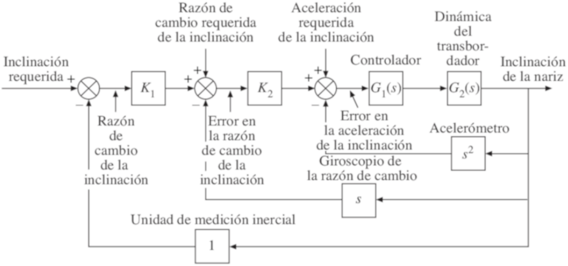


FIGURA 1 Sistemas de control para el transbordador espacial.

Introducción

El libro de Lay, Algebra Lineal y sus Aplicaciones, expone una motivación al tema con el ejemplo de la página anterior: Matemáticamente, las señales de entrada y salida de un sistema de control son funciones. Es importante, para las aplicaciones, que estas señales puedan sumarse y multiplicarse por escalares.
Surgen muchos espacios vectoriales en ingeniería, física y estadística.

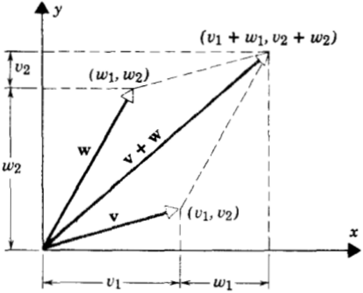
¿En qué se parecen los vectores geométricos, las matrices y los polinomios?

Estudiaremos **conjuntos** con el aditamento que se definen para sus elementos dos operaciones: **adición (+)**, y **multiplicación por números o escalares**, y se pide que cumplan ciertas condiciones.

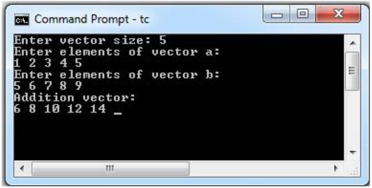
- Empezaremos con ejemplos más conocidos, pero será necesaria cierta abstracción para poder generalizar estos conceptos.

suma: extensión del concepto

Recordemos que esta operación SE DEFINE así, y por eso se puede programar como a la derecha




```c
/* Vector addition */
#include<stdio.h>
int main() {
 int a[10], b[10]; /* vectors to be added */
 int c[10]; /* result vector */
 int n, i;
 clrscr();
 /* read vectors a and b */
 printf("Enter vector size: ");
 scanf("%d", &n);
 printf("Enter elements of vector a:\n");
 for (i = 0; i < n; i++)
   scanf("%d", &a[i]);
   printf("Enter elements of vector b:\n");
   for (i = 0; i < n; i++)
    scanf("%d", &b[i]);
    /* perform vector addition */
    for (i = 0; i < n; i++)
      c[i] = a[i] + b[i];
    /* print addition vector C */
    printf("Addition vector:\n");
    for (i = 0; i < n; i++)
      printf("%d ", c[i]);
      getch();
}
```



Definición

Un **espacio vectorial** es un conjunto no vacío V de objetos, llamados *vectores*, en el que están definidas dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por escalares* (números reales), sujetas a los diez axiomas (o reglas) que se enlistan a continuación. Los axiomas deben ser válidos para todos los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todos los escalares c y d.

1. La suma de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotada mediante $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, está en V.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
4. Existe un vector **cero** $\mathbf{0}$ en V tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada $\mathbf{u}$ en V, existe un vector $-\mathbf{u}$ en V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. El múltiplo escalar de $\mathbf{u}$ por c, denotado mediante $c\mathbf{u}$, está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$.
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

link 13

Interpretar la definición

- Las propiedades 1 y 6 hablan de operaciones que llamamos **cerradas** en el sentido que su resultado no se "escapa"del conjunto V en cuestión.
- **Conmutativa** de la suma, el orden de los vectores a sumar no influye el resultado (propiedad 2).
- **Asociativa**: la 3 es habla de la suma, y la 9 para el producto por escalares.
- Existencia de elemento **neutro en el conjunto**: 4 habla de la suma, y 10 del producto por escalares.
- El neutro de la suma permite definir un vector opuesto (propiedad 5). Todo vector tiene dentro de V su vector **opuesto**.
- **Distributiva**: 7 y 8 la especifican para ambas operaciones.

En algunos textos, algunas de estas propiedades se sobreentienden.

Ejemplo $V = \mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales

En la unidad anterior trabajamos con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y las operaciones estándar de suma y producto por escalar justamente cumplen todos los axiomas de espacio vectorial.

Se extienden naturalmente a $\mathbb{R}^n$. Si tomamos dos elementos o n-úplas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de este conjunto, la suma de los mismos se realiza respetando orden de sus componentes (coordenadas cartesianas que son números reales):

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = u_i + v_i \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots n$$

Y la multiplicación por un escalar $a \in \mathbb{R}$:

$$a\,\mathbf{u} = (a\,v_1, a\,v_2, \cdots, a\,v_n)$$

Donde se ha generalizado un vector por sus coordenadas, teniendo siempre el "inicio" del vector en el origen.

Ejemplo $V = \mathbb{R}^n$

Luego de la definición y cuando un conjunto puede decirse que es un espacio vectorial, se busca trabajar con sus vectores sin tener que escribir sus componentes si no es necesario. Esto permite trabajar con propiedades analíticas o numéricas en lugar de geométricas allí donde graficar es imposible.

Notemos que no se ha hablado del producto escalar entre vectores. Ampliar el que conocen a $\mathbb{R}^n$ sirve para tener definida una norma de vectores que es mayor o igual a cero para cualquier vector. Es la característica de espacios vectoriales Euclideos (o Euclidianos como los llama Anton).

Apendice, pag 41

Ejemplo $V = \mathbb{R}^{n\times m}$ con las operaciones usuales

También nos resultaría natural comprender a conjuntos de matrices de **tamaño fijo** como espacios vectoriales. Si tomamos dos elementos A y B matrices de un mismo tamaño, y $k \in \mathbb{R}$, la suma, nuevamente, se realiza respetando orden de sus elementos (que son números reales):

$$(A+B)_{i\,j} = A_{i\,j} + B_{i\,j} \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots n,\ j = i = 1, 2, \cdots m$$

$$(k\,B)_{i\,j} = k\,B_{i\,j}$$

Como las operaciones son todas entre números reales, es fácil ver que son cerradas. También es sencillo comprobar el resto de los axiomas.

Ejemplo $V = P_n$ conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual a n

Repaso

El grado de un polinomio es la mayor potencia que aparece cuyo coeficiente no es cero. Tal coeficiente (a_n) se llama coeficiente principal del polinomio.
Si todos los coeficientes fueran cero, $\mathbf{p}$ es el polinomio cero y se lo incluye en $V = P_n$ aún cuando por cuestiones técnicas su grado no esté definido.

$$P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n\}$$

P_n es un subconjunto del conjunto de funciones reales continuas con dominio todo $\mathbb{R}$. En este caso los vectores son polinomios. Resulta obvio que la suma de dos polinomios p y $q \in P_n$ es otro polinomio $\in P_n$, y lo mismo sucede con la multiplicación por un escalar real: Si $q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$,

$$(p+q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_n + b_n)t^n$$

$$(\alpha p)(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \ldots + \alpha a_n t^n$$

El vector nulo es el polinomio nulo $0(t) = 0 + 0t + \ldots + 0t^n$ y el opuesto a $p(t)$ es $-p(t) = -a_0 - a_1 t - \ldots - a_n t^n$.

Más propiedades

De los axiomas que definen un espacio se desprenden otras propiedades:

Propiedades: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real

- $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $-(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{v} - \mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
- $k(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k\mathbf{v} - k\mathbf{w}$ para todo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.
- $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dejamos para ver en los libros el ejemplo del conjunto $\mathbb{R}[x]$ de las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que es un espacio vectorial. También se recomienda ver ejemplos que no son espacios pues no se cumple alguno de los axiomas de la definición.

Subespacios vectoriales

Un espacio vectorial puede estar contenido dentro de otro, no solo como conjunto, sino también que con las mismas operaciones cumple todos los axiomas de espacio.

Subespacio

Sea V un espacio vectorial real, y sea W un subconjunto de V; W es un subespacio de V si se satisfacen las siguientes tres condiciones:
- El vector $\mathbf{0}$ de V pertenece a W.
- Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de W, entonces su suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertenece a W.
- Si $\mathbf{v}$ es un elemento de W y $c \in \mathbb{R}$ es un escalar, entonces el producto $c\,\mathbf{v}$ pertenece a W.

Todo espacio vectorial V tiene por lo menos dos subespacios “evidentes”: $\{\mathbf{0}\}$ y el mismo V.

Subespacios vectoriales

La definición puede reformularse de modo de contar con un teorema que da condiciones necesarias y suficientes para identificar subespacios:
Dado un espacio V, un subespacio de V es un subconjunto $W \subseteq V$ no vacío que verifica $\forall \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$ y todo escalar c: $(\mathbf{u} + c\,\mathbf{v}) \in W$.

Ejemplos de subespacios:

Subespacios de $\mathbb{R}^2$

- $\{\mathbf{0}\} = \{(0,0)\}$
- Rectas que pasan por el origen *
- $\mathbb{R}^2$

Subespacios de $\mathbb{R}^3$

- $\{\mathbf{0}\} = \{(0,0,0)\}$
- Rectas que pasan por el origen
- Planos que pasen por el origen
- $\mathbb{R}^3$

Al decir que un conjunto es, por ejemplo, *una recta que pasa por el origen*, estamos haciendo una descripción geométrica del mismo.

* desarrollamos en la página que sigue

Ejemplo: recta en $\mathbb{R}^2$

Partiendo del supuesto de que ya sabemos que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, es decir, que cumple los 10 axionas que un conjunto con operaciones de suma y producto por escalares debe cumplir; mostremos que un conjunto $\mathcal{V} = \{(x, y)/ax + by = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Para ello, basta con probar 3 condiciones:

- El elemento neutro de la suma de $\mathbb{R}^2$ pertenece a $\mathcal{V}$, o sea a la recta.
- la suma de dos elementos de la recta es un vector que pertenece a la recta.
- multiplicar por un escalar a un elemento de la recta devuelve otro elemento de la recta.

Recta, ejemplo de demostración de subespacio

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$$

El elemento neutro de $\mathbb{R}^2$ es $\vec{0} = (0, 0)$. ¿Pertenece $\vec{0}$ al conjunto (recta)? Para verificar ello tenemos la ecuación de la recta, donde vamos a reemplazar $x = 0$ e $y = 0$

$$ax + by =? \xrightarrow{x=0, y=0} a0 + b0 = 0,$$

donde se ve que se ve que el elemento neutro pertenece a la recta.

Recta, ejemplo de demostración de subespacio

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\}$$

El elemento neutro de $\mathbb{R}^2$ es $\vec{0} = (0, 0)$. ¿Pertenece $\vec{0}$ al conjunto (recta)? Para verificar ello tenemos la ecuación de la recta, donde vamos a reemplazar $x = 0$ e $y = 0$

$$ax + by =? \xrightarrow{x=0, y=0} a0 + b0 = 0,$$

donde se ve que se ve que el elemento neutro pertenece a la recta.

Para analizar si la suma es cerrada entre los vectores del conjunto, vamos a tomar dos elementos genéricos. ¿Qué significa esto? Que nos vamos a independizar de valores particulares para observar la estructura del conjunto.

Veamos primero cómo es cualquier punto de la recta como vector. A partir de la ecuación de nuestra recta donde pre-suponemos, $b \neq 0$.

$$ax + by = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x$$

Entonces, cualquier elemento de $\mathcal{V}$ puede escribirse como

$$(x, y) = \left(x, -\frac{a}{b}x\right) = x\left(1, -\frac{a}{b}\right),$$

Cualquier **vector (elemento) del conjunto** recta queda definido por el valor que tome x multiplicado por el vector director $(1, -a/b)$.
Por cómo trabajamos, la recta quedó parametrizada [1] por x con lo cual para elegir dos puntos cualesquiera le asignamos dos valores reales arbitrarios a x.

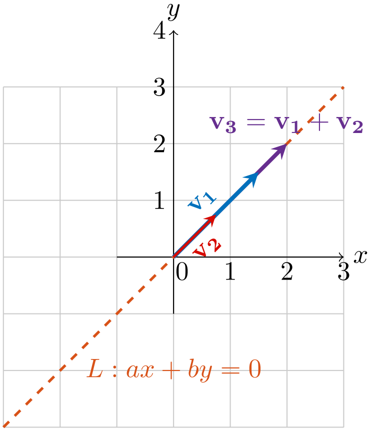
Tomemos, por ejemplo, los valores $x = x_1$ y $x = x_2$, escribamos los vectores:

$$\mathbf{v_1} = x_1 \left(1, -\frac{a}{b}\right), \quad \mathbf{v_2} = x_2 \left(1, -\frac{a}{b}\right)$$

podemos sumarlos

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

Se ve gráficamente que $\mathbf{v_3}$ pertenece también a la recta.



[1] Este parámetro se puede llamar con cualquier letra en realidad.

Usando la propiedad asociativa del producto por escalares nos queda que la suma es

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = x_1 \left(1, -\frac{a}{b}\right) + x_2(1, -\frac{a}{b}) = (x_1 + x_2) \left(1, -\frac{a}{b}\right) = x_3 \left(1, -\frac{a}{b}\right)$$

donde $x_3 = x_1 + x_2$.
Este vector suma $\mathbf{v_3} = x_3(1, -\frac{a}{b})$ tiene la misma forma que $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$, que pertenecen a la recta. Para verificar analíticamente que $\mathbf{v_3}$ pertenece a la recta basta con reemplazar sus componentes en la ecuación de la recta.
Tenemos que $\mathbf{v_3} = x_3 \left(1, -\frac{a}{b}\right)$. Luego

$$ax_3 + by_3 = ax_3 - b\, x_3 \frac{a}{b} = 0$$

verificando la ecuación de la recta $\Rightarrow \mathbf{v_3} \in \mathcal{V}$.

• Hemos verificado que la suma es cerrada en el conjunto $\mathcal{V}$

- Con respecto al producto por escalares de un vector cualquiera de la recta,

$$\mathbf{v} = x(1, -\frac{a}{b})$$

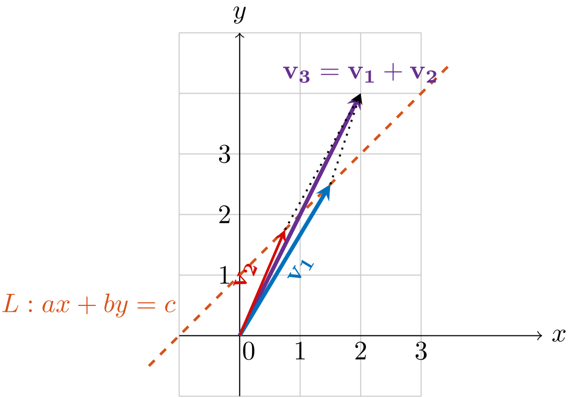
También debemos considerar un número con generalidad, $c \in \mathbb{R}$, y analizar si el vector $c\mathbf{v}$ es parte de la recta.

Como $cx(1, -\frac{a}{b}) = (cx, -cx\frac{a}{b}) \Rightarrow acx + b(-cx\frac{a}{b}) = 0$
verificando también la ecuación de la recta $\Rightarrow c\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Verificamos que la operación producto por escalares es cerrada en el conjunto $\mathcal{V}$

Finalmente, al ser $\mathcal{V}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ donde las operaciones suma y producto por escalares son cerradas, se cumple que $\mathcal{V}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

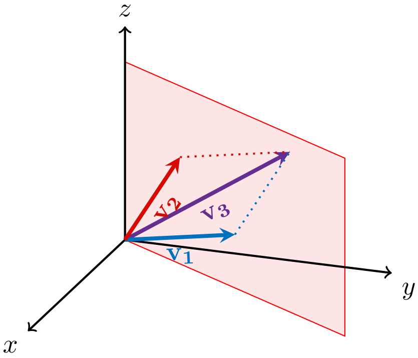
Veamos ahora qué ocurre con una recta que **NO** pasa por el origen, $ax + by = c \neq 0$.
Vemos graficamente que la suma no resulta cerrada:



Si $x = 0$ entonces $y = c/b$, por lo tanto, no tenemos al elemento neutro en esta recta, no tiene chances de ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Otro ejemplo: plano en $\mathbb{R}^3$

El análisis es análogo para un plano Π que pasa por el origen, se trata de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.



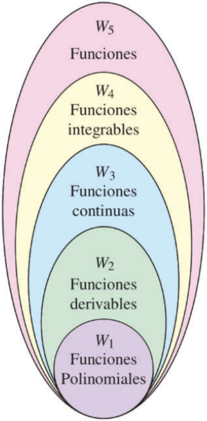
Para cada vector genérico, se deben fijar dos parámetros.

Otros ejemplos de subespacios

- P_n que ya mencionamos, los polinomios de grado menor o igual que n. Es subespacio de $\mathbb{R}[x]$ que son funciones de dominio y codominio real.
- P_{n-1} suponiendo $n \geq 1$ es subespacio de P_n y también de $\mathbb{R}[x]$
- Si $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} / A = A^T\}$, este conjunto de matrices simétricas es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$ de matrices cuadradas.
- **Tarea:** pensar otros ejemplos de conjuntos de matrices que sean espacio.

Observación: Si S y T son subespacios de V, entonces su intersección $S \cap T$ también es un subespacio de V.

Más ejemplos de subespacios, en $\mathbb{R}[x]$



Subespacios de funciones (cálculo)

Sea W_5 el *espacio vectorial* de todas las funciones definidas en $[0, 1]$, y sean W_1, W_2, W_3 y W_4 definidas como sigue

W_1 = conjunto de todas las funciones polinomiales definidas en el intervalo $[0, 1]$
W_2 = conjunto de todas las funciones derivables en $[0, 1]$
W_3 = conjunto de todas las funciones continuas en $[0, 1]$
W_4 = conjunto de todas las funciones integrables en $[0, 1]$

Demuestre que $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5$ y que W_i es un subespacio de W_j para $i \leq j$.

SOLUCIÓN

Del cálculo se sabe que toda función polinomial es derivable en $[0, 1]$. Por consiguiente, $W_1 \subset W_2$. además, el $W_2 \subset W_3$ porque toda función derivable es continúa, $W_3 \subset W_4$ porque toda función continua es integrable y $W_4 \subset W_5$ porque toda función integrable es, por supuesto, una función. Como resultado de los comentarios previos, se tiene que $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5$, como se observa en la figura 4.10. Se deja que usted compruebe que W_i es un subespacio de W_j para $i \leq j$. (Véase el ejercicio 46.)

Este caso trata con un intervalo fijo. Se puede especializar a un punto incluso, por ejemplo, el conjunto de funciones derivables en un punto fijo: ¿será subespacio de $\mathbb{R}[x]$?

Combinación lineal

Dado un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ de un espacio vectorial V, se llama una combinación lineal de ellos a cualquier vector de la forma

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, \cdots + a_r\mathbf{v}_r$$

donde $a_1, a_2 \cdots, a_r$ son escalares,

llamados **coeficientes de la combinación lineal**.

Se puede abreviar con el simbolo de sumatoria ($\sum$), y escribir

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} a_k\mathbf{v}_k$$

Conjunto generado y conjunto de vectores generadores

Dado un conjunto finito de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ de un espacio vectorial V, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r$ es un espacio vectorial, subespacio de V.

Se le dice subespacio **generado** por S.

La notación depende del texto. Por ejemplo el apunte del CBC escribe

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{r} k_i \mathbf{v_i} \, / \, k_i \in \mathbb{R} \right\} = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_r} \rangle$$

Los simbolos en azul indican *generado por*.
En otros textos: “gen()”

• A su vez, dado un espacio, muchas veces necesitamos hallar un conjunto de vectores generadores del mismo, esto es, tal que todo vector $\mathbf{v}$ sea combinación lineal de los vectores que se buscan.

Hemos visto ejemplos similares:

Expresa al vector $\vec{z} = (2, 1)$ como una combinación lineal de los vectores $\vec{x} = (3, -2)$ y $\vec{y} = (1, 4)$.

Solución: Supongamos que $\vec{z}$ se puede escribir como una combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, es decir, existen constantes a, b tales que $\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}$. Por lo tanto, solo debemos encontrar estas constantes: $(2, 1) = a(3, -2) + b(1, 4) = (3a, -2a) + (b, 4b)$

Cuya solución está dada por $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{z} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

Quiere decir que $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Vectores linealmente dependientes

Un conjunto de vectores se dice que son linealmente dependientes si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal. Es decir,

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

y $a_i \neq 0$ para algún valor de $i = 1, 2, ..., n$

Si varios vectores son linealmente dependientes (LD), entonces al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Recíproco: si un vector es combinación lineal de otros, entonces el conjunto de todos esos vectores es linealmente dependiente.

Ejemplo: aplicando esta definición se halla que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ dos vectores son LD si, y sólo si, son paralelos. Los vectores linealmente independientes en el plano tienen distinta dirección.

Independencia lineal

Un conjunto de vectores se dice linealmente independiente (LI) si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes. Por lo que la siguiente expresión

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

es cierta sólo cuando todos los coeficientes a_i son iguales a cero.

Si $n = 1$, las definiciones anteriores implican:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \{\boldsymbol{v}\} \text{ linealmente dependiente} \\ \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \{\boldsymbol{v}\} \text{ linealmente independiente} \end{cases}$$

Otro ejemplo: independencia lineal en $\mathbb{R}^3$

Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Planteando la combinación lineal nula

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema $\left\{ \begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array} \right.$, es decir $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

que tiene como única solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. El conjunto M es entonces linealmente **independiente**. Este resultado es también obvio a simple vista: Por la forma de los vectores, es claro que ninguno puede escribirse como combinación lineal de los otros dos.

Independencia lineal en $\mathbb{R}^n$

En forma análoga al ejemplo anterior, dado un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_r\}$ de $\mathbb{R}^n$, al construir una combinación lineal igualada a cero (recomendamos hacerlo)

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

y buscar las posibles soluciones para los coeficientes a_i, nos encontraremos analizando un sistema de ecuaciones lineales que es homogéneo, cuya representación matricial, esquemáticamente sería

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \cdots & \mathbf{v_r} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{n \times r}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde las flechas indican que los vectores se escriben como columnas.

Rango e independencia lineal

Conocemos un algoritmo (Gauss-Jordan) para obtener la forma reducida y escalonada de una matriz. La cantidad de filas no nulas de esa nueva matriz nos dice **cuántos de los vectores analizados** (columnas de A) son LI, es justamente el número que llamamos rango de la matriz A. Vemos que el rango de A a lo sumo vale n.

Ejemplo: en $\mathbb{R}^4$ se pueden encontrar conjuntos de hasta 4 vectores LI.

Repaso

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Llamamos ***rango*** de la matriz al número de filas no nulas que tiene su equivalente matriz escalonada y reducida en las filas. De arriba, por ejemplo se tiene rango(A)=3; las matrices B, E, F, I tienen rango 2; mientras que rango$(D) = 0$.

Si la matriz analizada es cuadrada

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las columnas de A son LI si y solo sí rango(A) $=n$.

O bien decir que la forma reducida y escalonada equivalente a A es la identidad de $n \times n$.

Podemos relacionar entonces que rango(A)$=n \iff \det(A) \neq 0$

Al contrario, cuando $\det(A) = 0$ quiere decir que rango(A) $< n$ y por lo tanto el conjunto de vectores con las filas (y/o columnas) de A es LD.

Base de un espacio vectorial

Definición

Un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V, es una base de V si y sólo si:

1) Es linealmente independiente
2) $\mathcal{B}$ genera V

El número n de elementos de la base es la dimensión del espacio vectorial V. Se lo indica como

$$\dim(V) = n$$

Importante: todas las bases de un espacio vectorial V de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

Como el vector nulo es linealmente dependiente, el espacio $\{\mathbf{0}\}$ no tiene base. A este espacio compuesto únicamente por el vector nulo, se le asigna dimensión cero.

Si no existe una base de V formada por un conjunto finito de vectores, se dice que V es un espacio de **dimensión infinita** (tal como, por ejemplo, el espacio de funciones $\mathbb{R}[x]$).

Para determinar la dimensión de un espacio vectorial, es suficiente hallar una base de dicho espacio.

La más sencilla de las bases es la que se llama base canónica o base estándar. Por ejemplo de $\mathbb{R}^3$ la base

$$\mathcal{B}_c = \{(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,0,1)\} = \left\{\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}\right\} \Rightarrow \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$$

Conociendo 3 valores queda definido un vector. En esa base, como sabemos $(x,y,z) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$.

Ejemplo con matrices

Si $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$, su base canónica se puede encontrar facilmente si notamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos analizar que $\dim(\mathbb{R}^{3\times 2}) = 6$,

Coordenadas

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ la base de un espacio vectorial V. Si

$$\mathbf{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$$

entonces $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, los coeficientes de la combinación lineal son las **coordenadas** de $\mathbf{v}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$. Como siempre, cuando usamos subíndices es porque el orden es importante.

Si por el contexto hay que aclarar de qué base se trata, anotamos $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, o bien con corchetes $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

Cuando no se explicita, se sobreentiende que se trata de la base canónica. Si bien las bases canónicas parecen ser las más simples y naturales para ser utilizadas, en algunas aplicaciones resulta conveniente utilizar otras bases por su significado geométrico, como veremos más adelante.

Ejercicio sobre bases

Decidir si el siguiente conjunto de vectores $A = \{(1,1),(0,1)\}$ forma una base para el espacio $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$.
De manera informal, podemos decir que una base es un conjunto de vectores a partir de los cuales, mediante combinaciones lineales entre ellos, podemos obtener cualquier otro vector de ese espacio. Pero debe ser un conjunto donde "no sobren" vectores.

Esto se obtiene si A genera a $\mathcal{V}$, osea, $\mathcal{V} = \langle A \rangle$, y si A es LI.

Dado un vector cualquiera $\mathbf{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ¿es posible escribirlo como combinación lineal de los vectores en A?

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & |x \\ 1 & 1 & |y \end{pmatrix}$$

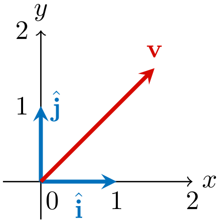
Quedó un sistema compatible determinado, por lo que es posible hallar α y β y serán únicos para cualquier $\mathbf{v}$.
En el caso $(x,y) = (0,0)$ se tiene $\alpha = \beta = 0$, lo que demuestra que A es LI.

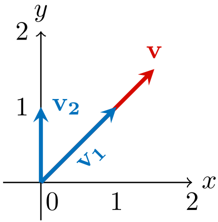
Escribamos a $\mathbf{v} = (x, y)$ como una combinación lineal de los vectores de la base $A = \{(1,1),(0,1)\} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ para ver sus coordenadas en la base A.

De lo planteado en la página anterior, invirtiendo la matriz se resuelve que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego $[\mathbf{v}]_A = (x, -x + y)$.
Si por ejemplo, $\mathbf{v} = (1.5, 1.5)$, entonces $[\mathbf{v}]_A = (1.5, 0)$, y graficamente:





Interpretación

Podemos ver en el ejemplo que $[\vec{v}]_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [\vec{v}]_{\mathcal{B}_c}$.

Coordenadas en base A = matriz * coordenadas en base $\mathcal{B}_c$.

Relacionando las bases, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ hace la transición (al multiplicar, cambia de base pero no modifica los vectores).

Dado un espacio vectorial, existe un número infinito de bases para elegir, ya que en un espacio vectorial de dimensión n, cualesquiera n vectores, linealmente independientes, forman una base.

Una matriz de transición también se suele llamar *de cambio de base*.

Retomando conceptos de espacios

1. Explique por qué $M = \{(1,2),(1,0),(0,1)\}$ no es base de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine si el conjunto $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$. De no ser así, dé una descripción geométrica del subespacio $\langle S\rangle$(generado por S).
3. Considere P_2 de los polinomios con grado hasta 2 y coeficientes reales. Responda si $S = \{1, x^2, x^2+2\}$ genera P_2.
4. Comprobar que $B = \{(2.-1,0),(1,2,3),(3,6,-5)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas de $\vec{w} = (5,-1,2)$ en la base B.

Retomando conceptos de espacios

1. Explique por qué $M = \{(1,2),(1,0),(0,1)\}$ no es base de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine si el conjunto $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$. De no ser así, dé una descripción geométrica del subespacio $\langle S\rangle$(generado por S).
3. Considere P_2 de los polinomios con grado hasta 2 y coeficientes reales. Responda si $S = \{1, x^2, x^2+2\}$ genera P_2.
4. Comprobar que $B = \{(2.-1,0),(1,2,3),(3,6,-5)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas de $\vec{w} = (5,-1,2)$ en la base B.

   La novedad es que todos los vectores de una base ortogonal son perpendiculares entre sí: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$. Eso permite una descomposición geométrica, muy relacionada con la idea de proyección que conocemos:

$$[\vec{w}]_B = \left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||^2}, \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_2}{||\vec{v}_2||^2}, \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}_3}{||\vec{v}_3||^2}\right) \approx (2.2,\ 0.6429,\ -0.0143)$$

Espacio Euclídeo

Llamamos *espacio euclídeo* de dimensión n al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el producto interno $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Si $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, diremos que C es un *conjunto ortogonal* de vectores si todos los pares de vectores distintos de C son ortogonales.

Es decir:

$$\forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq r \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Si $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, diremos que C es un *conjunto ortonormal* de vectores si es un conjunto ortogonal y todos sus vectores tienen norma 1.

Es decir:

$$\forall i, j \quad 1 \leq i, j \leq r \quad \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{y}$$

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq r \quad \|\mathbf{v}_i\| = 1$$

Propiedades:

- Si C es un conjunto ortogonal de vectores que no contiene al vector nulo, C es un conjunto linealmente independiente.
- Todo conjunto ortonormal de vectores es linealmente independiente.

Una *base ortogonal* de $\mathbb{R}^n$, es una base de $\mathbb{R}^n$ que es también un conjunto ortogonal.
Una *base ortonormal* de $\mathbb{R}^n$, es una base de $\mathbb{R}^n$ que es también un conjunto ortonormal.

- Todo conjunto ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^n$ se puede extender a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n$ admite una base ortonormal.
- Todo subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^n$ admite una base ortonormal.

Link de retorno 8