Unidad 3, segunda parte

Ingenierías en Electrónica, Ambiental, Telecomunicaciones

Universidad Nacional de Río Negro - Sede Andina

Mariana – 2024

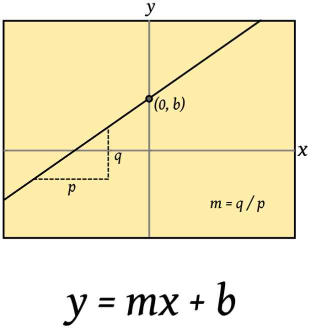
1. Rectas

2. Planos

Introducción

Esta unidad se completa con el estudio de rectas y planos. Suponemos un manejo de la aritmética básica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Una recta en $\mathbb{R}^2$ se determina con un punto y la pendiente de la misma, por ejemplo $y = m\,x + b$. Entonces b es la ordenada al origen, pues es el valor de y cuando $x = 0$, y m la pendiente.



La recta también puede pensarse como como un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, mx + b) \\ &= x(1, m) + (0, b) \end{aligned}$$

La recta como conjunto

El conjunto

$$L : \{\vec{r} = x(1, m) + (0, b),\ \text{con } x \in \mathbb{R}\}$$

es justamente la recta que conocemos reescrita de una forma que nos ayudará a generalizar.

- El escalar x es el parámetro del conjunto (recta) que puede llamarse con cualquier otra letra.
- El parámetro aparece multiplicado por un vector que suele llamarse vector director ya que brinda la dirección de la recta. Basados en el gráfico anterior, puede obtenerse conociendo dos puntos de la recta.
- Luego aparece sumado un vector que es constante para el conjunto y que traslada la recta completa para que pase por un punto fijo.

Ecuación de la recta

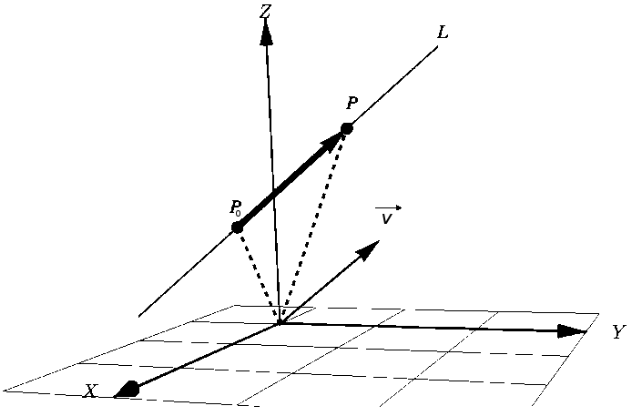
Entonces la ecuación vectorial para los puntos $\vec{P}$ de una recta es

$$\vec{P} = \alpha\vec{v} + \vec{P_0}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Vemos que $\vec{P} - \vec{P_0} = \overline{P_0 P}$, es **paralelo** al vector dirección $\vec{v}$, porque el efecto de multiplicar por un número no cambia la dirección de un vector.

Ecuación de la recta

La misma ecuación determina una recta si los vectores en juego están en $\mathbb{R}^3$.
$L : \{\vec{P} = \alpha\vec{v} + \vec{P_0}$, con $\alpha \in \mathbb{R}\,\}$



Esta idea será útil para encontrar la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos dados.

Ejemplo: recta por dos puntos

Supongamos que queremos encontrar la ecuación vectorial de una recta L que contiene a los puntos $\bar{A} = (2, -1, 0)$ y $\bar{B} = (5, 1, -4)$.

Como director, el vector que une los puntos (no importa el sentido), puede ser $\overline{AB} = (5, 1, -4) - (2, -1, 0) = (3, 2, -4)$.

Al multiplicar por todos y cada uno de los valores reales, se recorre una recta, pues se acorta o alarga e incluso cambia el sentido del vector director (no su dirección). Solo falta trasladar (sumar) esta recta para que contenga a uno de los puntos dados, por ejemplo A.

$$L : \{\vec{P} = (3, 2, -4)t + (2, -1, 0),\ \text{con } t \in \mathbb{R}\}$$

Cuando $t = 0$ se obtiene $\vec{P} = (2, -1, 9) = \bar{A}$.

Cuando $t = 1$ se tiene $\vec{P} = (5, 1, -4) = \bar{B}$. Por lo tanto la recta cumple lo pedido.

Otras formas de expresar una recta

Si al punto generico $\vec{P}$ de la recta anterior lo escribimos como sus coordenadas (x, y, z), podemos de aquí

$$(x, y, z) = (3, 2, -4)t + (2, -1, 0)$$

obtener tres igualdades

$$L : \begin{cases} x = & 3t + 2 \\ y = & 2t - 1 \quad \text{donde } -\infty < t < \infty \\ z = & -4t \end{cases}$$

que se denominan las **ecuaciones paramétricas de la recta**.

En el mismo ejemplo, si despejamos el parámetro t de cada ecuación e igualamos (t determina un único punto de la recta)

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{-z}{4}$$

Por lo tanto otra forma de expresar una recta es a través de las **ecuaciones simétricas**:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

El vector director tiene las coordenadas (a, b, c). Al pasar de una expresión de la recta a otra debe tenerse cuidado que no dividir por cero.

Pertenencia

Un problema que puede ser de interés es saber si un punto pertenece a una recta. Nuestro manejo de ecuaciones será fundamental.
Ejemplo: si $(x, y, z) = (3, 2, 1) + \alpha\ (-4, -1, -1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es la ecuación vectorial de una recta r.

¿$(5, -3, 1) \in r$?

Veamos si existe algún valor de α que verifique esta ecuación vectorial:

$$(5, -3, 1) = (3, 2, 1) + \alpha\,(-4, -1, -1)$$

$$\begin{cases} 3 - 4\alpha = 5 \\ 2 - \alpha = -3 \\ 1 - \alpha = 1 \end{cases}$$

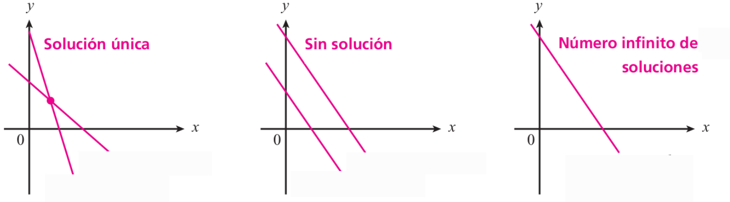
Este sistema es incompatible, así que el punto no pertenece a la recta.

Entre rectas

Ahora podemos aplicar la aritmética de vectores que aprendimos para encontrar

- intersección entre rectas
- ángulos entre rectas
- plantear una que sea perpendicular a otra (sus vectores directores deberán serlo)
- hallar la distancia entre un punto y una recta.

Intersección entre rectas de $\mathbb{R}^2$



Sin sorpresa, cada ecuación: cte $x +$ cte' $y =$ nro es una recta.

Intersección en $\mathbb{R}^3$

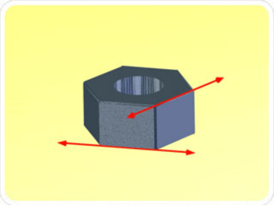
Para hallar la intersección entre las rectas $L_1 = \lambda(2,-2,-1) + (3,0,2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L_2 = t(-2,1,2) + (2,1,-1)$, con $t \in \mathbb{R}$, hay que igualarlas, y trabajar con las ecuaciones resultantes.

$$\left\{\begin{array}{rl} 2\lambda + 3 & = -2t + 2 \\ -2\lambda & = t + 1 \\ -\lambda + 2 & = 2t - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2\lambda + 2t & = -1 \\ -2\lambda - t & = 1 \\ -\lambda - 2t & = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Sistema lineal}$$

El sistema es incompatible, y en consecuencia las rectas no se intersecan.

¿Son paralelas entonces?
El producto de sus vectores directores $(2,-2,-1) \times (-2,1,2) \neq \vec{0}$, no son rectas paralelas.

En $\mathbb{R}^3$ aparecen las llamadas rectas *alabeadas*: no se cruzan pero tampoco es posible construir un plano que las contenga, porque no son paralelas.



Verdadero o Falso

La recta L que pasa por los puntos $A = (-1,\ 2,\ 4)$ y $B = (3,\ 0,\ -2)$ safisface:

a) Cada punto de L cumple $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(-4, 2, 6)$ para un $t \in \mathbb{R}$

b) $L \equiv \{(x, y, z) = \alpha(8, -4, -12) + (3, 0, -2)$ con $\alpha \in \mathbb{R}\}$

c) Los puntos de L cumplen $\frac{(x-3)}{4} = \frac{(-y)}{2} = \frac{(z+2)}{-6}$

d) L es el conjunto solución del sistema lineal $\begin{cases} -4x + 10y - 6z & = 0 \\ x - y + z & = 1 \end{cases}$

Por dos puntos dados, pasa una única recta, tanto en $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$.

Lugares geométricos y gráfica de ecuaciones.

En el estudio de la **geometría analítica** se nos presentan dos problemas básicos que son inversos entre sí:

- Dada una ecuación, determinar el lugar geométrico que representa, es decir, trazar la gráfica correspondiente.
- Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

La geometría analítica es la parte de las matemáticas que establece una conexión entre el álgebra y la geometría euclidiana, y en la cual se estudian figuras referidas a un sistema de coordenadas.

Entre rectas

Resumen sobre las posiciones relativas:
En $\mathbb{R}^2$

- Coincidentes (distinta parametrización pero el mismo gráfico).
- Se cruzan en un punto: oblícuas o perpendiculares según ángulo.
- Son paralelas

Lo mismo en $\mathbb{R}^3$ cuando sean coplanares, más la posibilidad de ser

- Rectas alabeadas, $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ pero no hay un plano que las contenga.

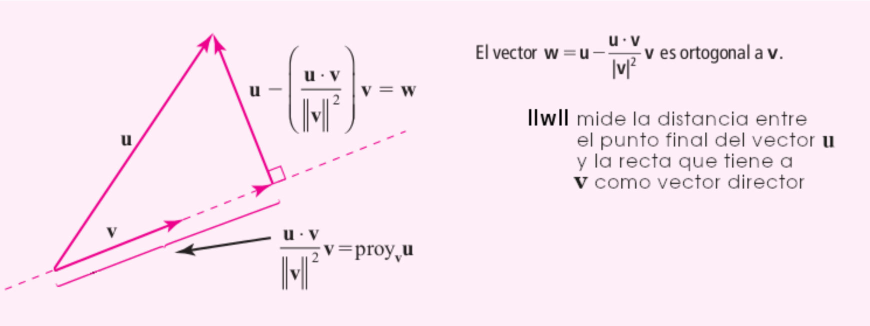
Definición

La distancia entre dos rectas se define como la menor (distancia) posible entre todos sus puntos.

Distancia a una recta

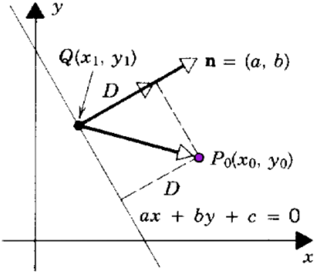
Aplica descomposición ortogonal

Para hallar la distancia entre un punto $\bar{u}$ y una recta L de la que conocemos su ecuación vectorial y por ello, su vector director $\vec{v}$, descomponemos con ayuda de la proyección al vector $\mathbf{u}$ que une un punto de L con el que nos interesa.
Tenemos este esquema:



En $\mathbb{R}^2$

Encontrar una fórmula para calcular la distancia D entre el punto $P_0(x_0, y_0)$ y la recta $ax + by + c = 0$.



$$D = \|\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_0\| = \frac{|\overrightarrow{QP}_0 \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

desarrollo en libro de Anton pag.173

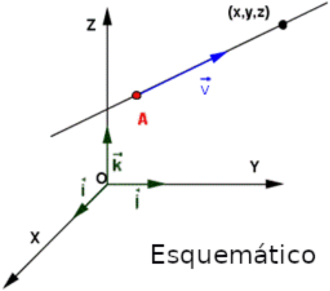
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se refiere a la 5ta edición del Anton.

Aunque dispongamos de una fórmula como esa, es bueno entender y poder razonar los ángulos entre vectores para encarar otro tipo de problemas.

Ej: Hallar el área y perímetro para un polígono si las coordenadas de los vértices son...

Ejemplo: distancia a una recta



Dada $L = \{(1-\lambda, 1+\lambda, 3\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, calcular la distancia entre L y el origen.

Identificamos un vector director $\vec{v} = (-1, 1, 3)$. y un punto* de la recta, por ejemplo $A = (1, 1, 0)$. Construimos $\vec{u} = (1, 1, 0)$ el vector que une A con el punto al cual deseamos medir la distancia que es $\vec{0}$.

Aplicamos la descomposición ortogonal para calcular un vector que nos permita hallar la distancia

$$\vec{w} = \vec{u} - \mathrm{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = (1,1,0) - \frac{(1,1,0)\cdot(-1,1,3)}{||(-1,1,3)||^2}(-1,1,3) \Longrightarrow \vec{w} = (1,1,0)$$

La distancia que se desea calcular es entonces $||\vec{w}|| = ||(1,1,0)|| = \sqrt{2}$

---

* Arbitrariamente elegimos evaluar la recta en $\lambda = 0$ para obtener A. Probar con otro punto.

Mismo ejemplo: distancia a una recta construyendo otra $\perp$

Dada $L = \{(1-\lambda, 1+\lambda, 3\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, calcular la distancia entre L y el origen.

Otro enfoque:
Identificamos un vector director $\vec{v} = (-1, 1, 3)$. Buscamos otro vector $\vec{n}$ que cumpla $\vec{n} \perp \vec{v}$, osea $(a, b, c) \cdot \vec{v} = -a + b + 3c = 0$. Proponemos $a = 1$, $b = 1$ y queda entonces $c = 0$. Una nueva recta R que pasa por el punto al cual deseamos medir la distancia, $\vec{0}$, y es perpendicular a L sería

$$R = \{\vec{n}t + \vec{0} = (t, t, 0), t \in \mathbb{R}\}$$

Buscamos $\vec{x} = L \cap R$, punto de intersección de estas rectas perpendiculares, planteando el sistema

$$S : \begin{cases} t = 1 - \lambda \\ t = 1 + \lambda \\ 0 = 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{x} = (1, 1, 0) \text{ que cumple } \vec{x} \in L \text{ y } \vec{x} \in R.$$

Por construcción la distancia que se desea calcular es $||\vec{x} - \vec{0}|| = ||(1, 1, 0)|| = \sqrt{2}$

Mismo ejemplo: distancia a una recta usando análisis mat.

Dada $L = \{(1-\lambda, 1+\lambda, 3\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, calcular la distancia entre L y el origen.

Primero:
Para facilitar el cálculo, convencernos que si una función $f(x) \geq 0$ toma el valor mínimo en x_m entonces $f^2(x)$ también será mínima en x_m.
Por regla de la cadena $\frac{df^2}{dx} = 2f\frac{df}{dx}$

$$f'(x_m) = 0 \Longrightarrow \left.\frac{df^2}{dx}\right|_{x_m} = 2f(x_m)f'(x_m) = 0$$

La vuelta ($\Longleftarrow$) también se cumple siempre que $f(x_m) \neq 0$.

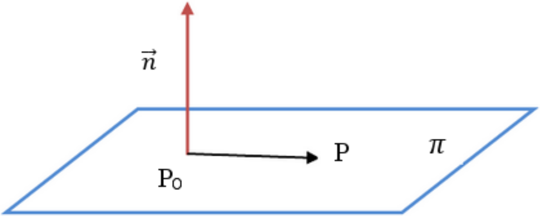
La función distancia al cuadrado entre un punto de la recta y el origen es, para esta recta,

$$d^2(\lambda) = (1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (3\lambda)^2 = 11\lambda^2 + 2.$$

Anulando la derivada se encuentra que d^2 es mínima en $\lambda = 0$, y para ese valor, $d^2(0) = 2$, por lo que la distancia que se desea calcular es entonces $d = \sqrt{2}$.

Ecuación del plano

El problema de una recta de $\mathbb{R}^3$ a la cual buscamos otra que sea perpendicular, tiene infinitas soluciones que conforman un plano.
Es posible determinar un plano en el espacio tridimensional al dar su inclinación y especificar uno de sus puntos. Para describir la inclinación es conveniente dar un vector $\vec{n}$, al que llamamos vector normal y que es perpendicular al plano.



El plano consta de los puntos $\vec{P} = (x, y, z)$ tales que

$$\vec{n} \cdot \overline{P_0P} = 0$$

Esta se suele llamar la **ecuación normal del plano**.

Ecuación del plano

De esta forma, $\vec{P_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es parte del plano. Si se tiene $\vec{n} = (a, b, c)$, entonces la expresión de arriba queda

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$$

Suele usarse una letra griega mayúscula para nombrar un plano, por ejemplo Π (Pi). Llamando $d = \vec{P_0} \cdot \vec{n}$,

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow \color{red}{a\,x + b\,y + c\,z = d}}$$

Esta última es la **ecuación implícita o cartesiana del plano**.
Si por el contexto está claro, simplemente: ecuación del plano.

Ecuación del plano

Reciprocamente, en $\mathbb{R}^3$ la solución de una ecuación lineal que sea $ax + by + cz = constante$ es un plano cuya normal es $\vec{n} = (a, b, c)$.

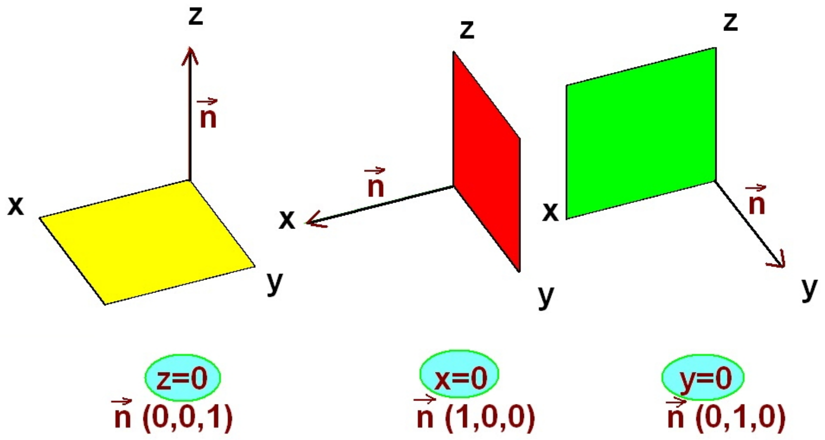
Para dar una interpretación geométrica es importante el contexto

Por ejemplo, el conjunto $L = \{(x, y)/2x - 6y = 1\}$ es una recta $L \in \mathbb{R}^2$ con un posible vector director $(1,\ 2)$ y vector que ubica la recta (punto que pertenece) $(0,\ -1/6)$.

Pero $\Pi = \{(x, y, z)/2x - 6y = 1\}$ es un plano $\Pi \in \mathbb{R}^3$ es un plano, con un posible vector normal $(2, -6, 0)$ y un punto del plano, el $(0,\ -1/6, 5)$ donde la coordenada z se eligió arbitrariamente.

Otros ejemplos sencillos de planos

A estos se los suele también llamar "plano xy", "plano yz", "plano xz".



Ejemplo:

$\Pi_1 : 2x + 4y = 9$ es un plano de normal $\bar{n_1} = (2, 4, 0)$.
$\Pi_2 : 6x + 12y = 0$ es un plano de normal $\bar{n_2} = (6, 12, 0)$.

Π_2 pasa por el origen pues $(0, 0, 0)$ satisface la ecuación que lo define (es una solución particular).

Además, se puede ver que Π_1 es paralelo a Π_2 porque $\bar{n_1}$ es paralelo a $\bar{n_2}$ y $(0, 0, 0) \notin \Pi_1$ por lo que son planos diferentes.

Si nos consultarán por la intersección de estos planos, estaríamos ante un sistema incompatible de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^3$

$$S : \begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \varnothing$$

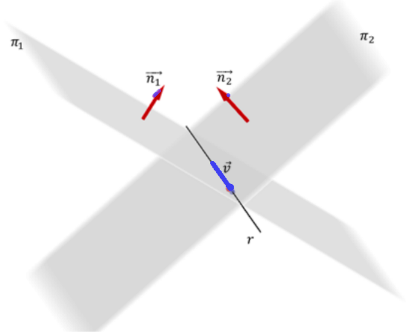
Un problema complementario es medir la distancia entre esos Π_1 y Π_2

Otros ejemplos de planos

Dos planos no paralelos: su intersección es una recta

Dos planos no paralelos $\pi_1 \ : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 \ : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ determinan al cortarse una recta en $\mathbb{R}^3$ que queda expresada por el sistema de ecuaciones lineales:

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$



Notar que $\vec{v}$ es paralelo a $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$, y que de ser planos paralelos $\overline{n_1} \times \overline{n_2} = \bar{0}$

Otros ejemplos de planos

Del libro de Anton, la situación con 3 planos, cuando se tiene sun sistema $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Cada fila es la ecuación de un plano.

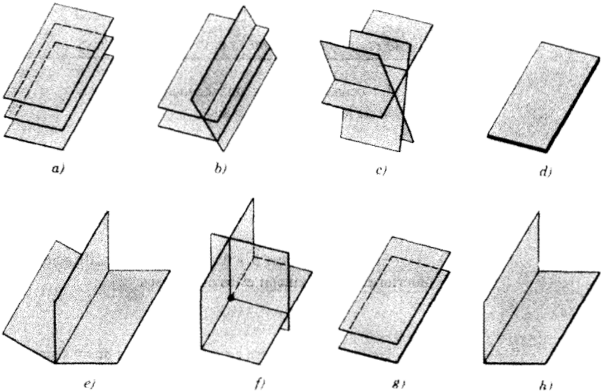
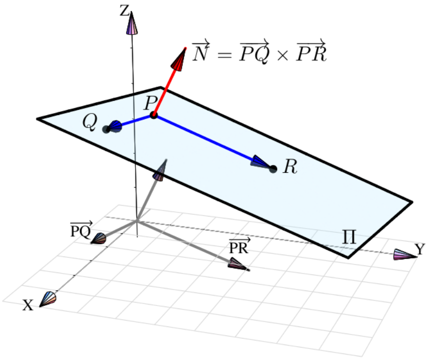


Figura 2 *a*) No existe solución (3 planos paralelos). *b*) No existe solución (2 planos paralelos). *c*) No existe solución (3 planos sin intersección común). *d*) Infinidad de soluciones (3 planos coincidentes). *e*) Infinidad de soluciones (3 planos que se intersecan en una recta). *f*) Una solución (3 planos que se cortan en un punto). *g*) No existe solución (2 planos coincidentes paralelos a un tercer plano). *h*) Infinidad de soluciones (2 planos coincidentes que se intersecan con un tercer plano).

Plano por 3 puntos

Dados tres puntos no alineados, $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{R}$, podemos construir el plano Π que los contiene



Calculamos un vector normal

$$\vec{N} = \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

Entonces conocemos $(a, b, c) = \vec{N}$ para la ecuación del plano. Como el plano debe contener al punto $\bar{P}$ (o cualquiera de los 3) es posible obtener d y completar la ecuación:

$$ax + by + cz = d$$

Ejemplo

Busquemos una ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C

$$A = (1, 1, 0); \quad B = (2, 3, 0); \quad C = (-1, -2, 0)$$

Elegimos $\vec{a} = \overline{AB} = B - A = (1, 2, 0)$ y $\vec{b} = \overline{AC} = C - A = (-2, -3, 0)$.
Calculo del vector ortogonal a ambos a través del producto vectorial

$$\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Con $\mathbf{N}$ y un punto fijo del plano podremos escribir la ecuación del plano. Ese punto lo podemos elegir como cualquiera de los puntos que da el enunciado. Elijamos A, y llamamos $\mathbf{P} = (x, y, z)$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} \Rightarrow (0, 0, 1) \cdot (x, y, z) = (0, 0, 1) \cdot (1, 1, 0) \Rightarrow z = 0$$

Este es el plano xy, que mantiene constante $z = 0$.

Ecuación vectorial del plano

Definición

La **ecuación vectorial del plano** escribe cada punto del mismo como una suma o *combinación* lineal de otros vectores. Esto es, se multiplica por escalares y se suma.

Por ejemplo, el conjunto

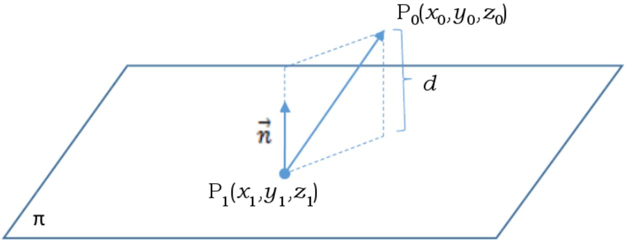
$$P = \{(5, -1, 0) + s\,(-1, 1, 3) + t\,(4, 3, -1), \ \ \text{con } t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\}$$

El vector que aparece solo (sin multiplicar por los parámetros), $(5, -1, 0)$ es un punto fijo de este plano. Si no estuviera $(5, -1, 0)$ tendríamos un plano similar, paralelo, que pasa por el origen

$$P_o = \{s\,(-1, 1, 3) + t\,(4, 3, -1), \ \ \text{con } t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\}$$

Distancia de un punto a un plano

Para hallar la distancia entre un punto $\bar{P}_o$ y un plano Π descomponemos con ayuda de la proyección. Se busca primero el vector $\overline{P_1 P_o}$ donde $\bar{P}_1$ es un punto de Π, y se proyecta en dirección de $\bar{n} = (a, b, c)$



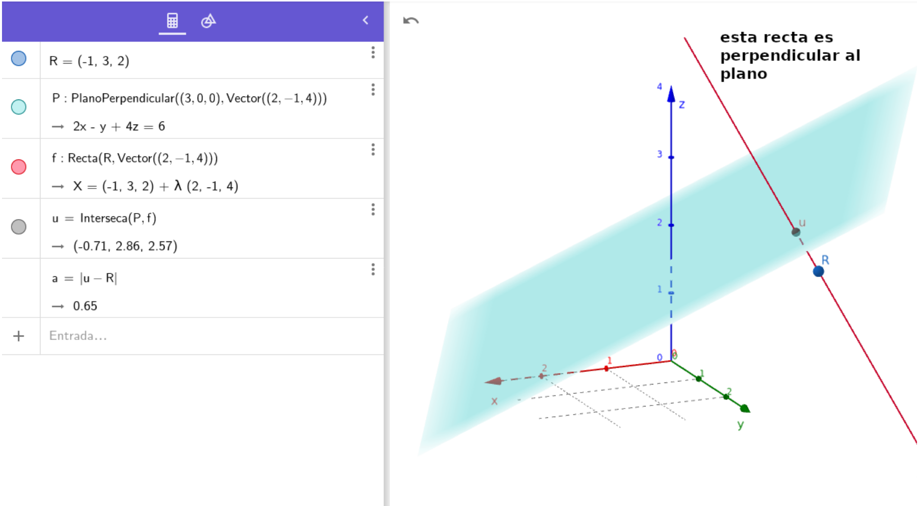
$$d = \left|\left|\mathrm{Proy}_{\bar{n}} \overline{P_1 P_0}\right|\right|$$

Se puede hallar (ej. pag 197 libro de Anton) que esta distancia es también

$$d = \frac{|a\, x_o + b\, y_o + c\, z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

donde la ecuación del plano es $a\, x + b\, y + c\, z + d = 0$, y el punto de interés es el (x_0, y_0, z_0).

Alternativa, si el punto externo al plano es $\mathbf{R}$, podemos construir una recta L de director $\mathbf{n} = (a, b, c)$ que pase por $\mathbf{R}$. Luego encontrar $\mathbf{u} = L \cap \Pi$ y la distancia que buscamos es la que hay entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{R}$, osea $\|\overline{uR}\|$.



Intersección recta $\cap$ plano

Sean $P: \quad 2x - 3y + z + 1 = 0$ y la recta $r: (x, y, z) = (0, 1, 3) + \alpha(1, 0, 1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

¿Cómo se busca la intersección entre la recta y el plano? Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y las reemplazamos en la ecuación del plano.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

$$2\alpha \; - \; 3 \cdot 1 + (3 + \alpha) + 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = -\frac{1}{3}$$

Reemplazando ese valor de α en la recta obtenemos el punto de intersección: $r \cap P = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 1, \frac{8}{3}\right) \right\}$

¿Existe una manera de anticipar si una recta es paralela a un plano sin buscar la intersección? ¿Qué ocurre si la recta está incluida en el plano?

Ejercicio para el hogar

Sea π el plano paralelo al eje y que pasa por $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$, y

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + kz = 2 \end{cases}$$

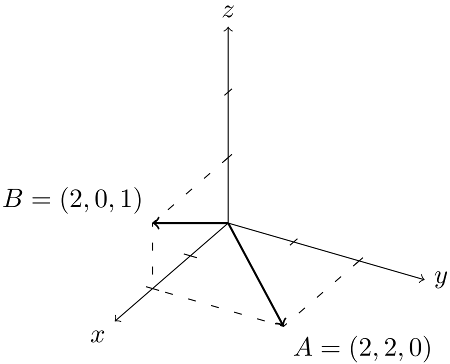
Hallar, si es posible, el valor de k para que la recta r sea paralela a π.

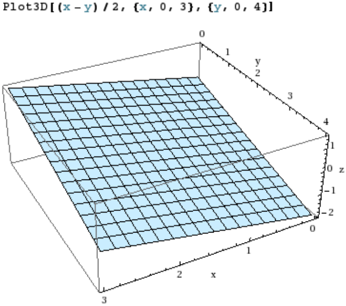
Si existe k, analizar si $r \subset \pi$.

El tema es más amplio, pero ¡hasta acá llegamos!

Apéndice

Construyamos un plano con todas las combinaciones de estos vectores





Si bien es correcto que con los dos vectores se tiene $P = \{\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$; para graficar se obtuvo la ecuación del plano y se despejó z en función de x e y. Se tuvo que elegir un intervalo de x y uno de y, en cierta forma, encerramos una parte del plano en una caja con tamaño fijo para poder graficarlo.