

## PRESENTACIÓN ORAL

### **Comparación entre indicadores de caos en dinámica galáctica**

N. P. Maffione<sup>1,2</sup>, C. M. Giordano<sup>1,2</sup> & P. M. Cincotta<sup>1</sup>

(1) *Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG-UNLP)*

(2) *Instituto de Astrofísica de La Plata (IALP-CONICET)*

**Abstract.** Realistic models in Galactic Dynamics seem to present a divided phase space (Giordano & Cincotta, 2004). Therefore, it is necessary to rely on efficient techniques to study the global dynamical behaviour in order to split as well as to identify the complex nature of the orbital structure. Herein we present some results of an exhaustive comparison between two of such techniques: the well-known Lyapunov characteristic exponents, and a rather new one, introduced by Cincotta & Simó (2000), the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO).

**Resumen.** Los modelos realistas en Dinámica Galáctica parecen contar con un espacio de fases dividido (Giordano & Cincotta, 2004). Por lo tanto, es necesario disponer de técnicas eficientes para el estudio de la dinámica global, que separen e identifiquen la compleja naturaleza del movimiento orbital. En este trabajo se realizó una comparación exhaustiva entre dos de tales herramientas numéricas: una ya clásica, los exponentes característicos de Lyapunov, y otra más reciente, presentada por Cincotta & Simó (2000), el Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO).

## 1. Introducción

En modelos hamiltonianos realistas no existen otras integrales globales aparte de la energía; es el carácter no integrable de los modelos galácticos lo que indica la necesidad de contar con métodos numéricos eficientes para su estudio dinámico. Con este objetivo, se realizó una comparación entre dos de estas herramientas: los exponentes característicos de Lyapunov (LCNs), y el Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO), que ha sido satisfactoriamente aplicado a problemas de índole astronómica (ver por ejemplo Goździewski & Konacki, 2004).

En Cincotta et al. (2003), la eficiencia del MEGNO fue evaluada para el oscilador cuártico perturbado tridimensional, un modelo relativamente simple que permitió observar la estructura del espacio de fases en forma global. Aquí, en cambio, el MEGNO se aplica a un potencial que reproduce muchas de las características de las galaxias elípticas reales. Desarrollado por Muzzio et al. (2005), será éste el escenario para la comparación.

## 2. Comparación entre los Exponentes de Lyapunov y el MEGNO

El objetivo de esta sección es presentar los principales resultados de un relevamiento estadístico del comportamiento del MEGNO al aplicarlo al potencial galáctico presentado por Muzzio et al. (2005). A tal efecto, se consideraron los resultados obtenidos por dichos autores para los LCNs de las 3472 órbitas por ellos estudiadas. Para la clasificación de las órbitas se utilizó el criterio dado por Muzzio et al. (2005), donde se denominaron órbitas regulares a aquéllas con valores nulos de los exponentes uno y dos de Lyapunov -de ahora en más L1 y L2 respectivamente- (1644 órbitas), parcialmente caóticas a aquéllas con el L1 claramente positivo y el L2 igual a cero (308), y caóticas a las que tuvieran el L1 y el L2 claramente positivos (1520), donde por cero se entiende un valor,  $Vc$ , obtenido a partir de integraciones durante intervalos de 10000 u.t. (unidades de tiempo), en nuestro caso,  $Vc = \ln T/T \approx 0,00092$  (u.t.)<sup>-1</sup>. Muzzio et al. (2005) adoptaron un valor empírico ligeramente superior,  $Vc = 0,00155$  (u.t.)<sup>-1</sup>, y éste es el valor que consideraremos al efecto de respetar la clasificación por ellos realizada.

El cálculo del MEGNO se efectuó para distintos tiempos finales: cortos (1500 y 3000 u.t.), intermedio (5000 u.t.) y largo (10000 u.t.), aunque aquí sólo exponemos los resultados obtenidos para tiempos largos. Cabe destacar que existió un alto nivel de coincidencia en las clasificaciones dadas por ambos indicadores ya a tiempos cortos, y mencionar que la precisión en la conservación de la energía fue de  $\sim 10^{-12}$  en todos los casos.

### 2.1. Sobre el tiempo final de integración de 10000 u.t.

Ubicando las 3472 órbitas en un histograma según los respectivos valores del MEGNO para un tiempo de integración de 10000 u.t., se concluye que la concordancia entre la clasificación dada por este indicador y la resultante de los LCNs es prácticamente total. En efecto, el MEGNO ubica a todas las órbitas caóticas dentro de los intervalos de irregularidad (i.e. [2,01;10000]). Para las órbitas regulares se tiene un 92% de concordancia (1513 pertenecen al intervalo [0,1;2,01]). Las órbitas parcialmente caóticas muestran un comportamiento más parecido al de las caóticas que al de las regulares, aunque claramente se observa su máximo en el intervalo [10;100]; para las órbitas caóticas, el máximo se encuentra en el intervalo [100;1000).

La correlación entre los valores del MEGNO y los LCNs para las 3472 órbitas se muestra en las Figs. 1. Al respecto, cabe destacar que: se distinguen diferentes niveles de estabilidad de órbitas regulares debido a desviaciones del valor de regularidad establecido para el MEGNO ( $\sim 2$ ) [Cincotta & Simó (2000)]; los valores del MEGNO para las órbitas caóticas crecieron abruptamente respecto de los correspondientes a tiempos finales menores; las 308 órbitas parcialmente caóticas pertenecen al intervalo [2,01;10.000), indicando un comportamiento de tipo irregular para las mismas, hecho que se explica por el carácter escalar del MEGNO que resulta equivalente al máximo exponente de Lyapunov, aún cuando, tal como se especifica en Muzzio et al. (2005), no existiría tal parentesco: la distribución espacial de esta clase orbital es muy distinta a la de las órbitas caóticas, no así a la de las regulares. De todas maneras el MEGNO puede definirse también en tres direcciones, y de esta forma podrían distinguirse órbitas

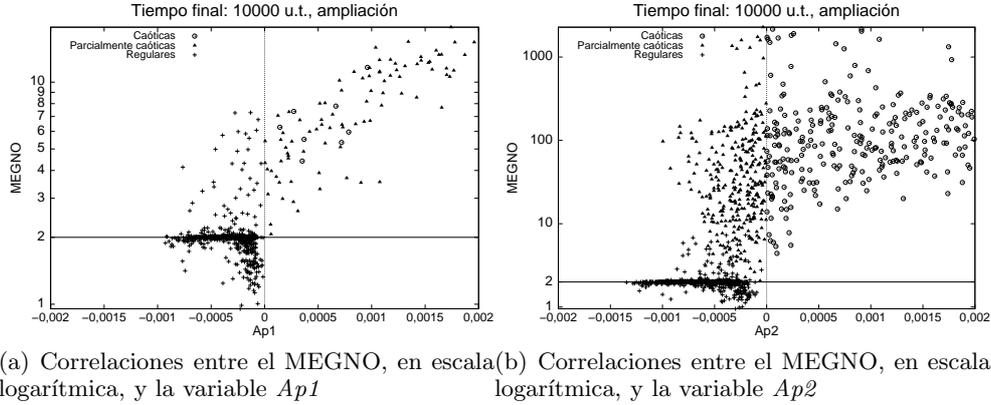


Figura 1. MEGNO Vs.  $Ap$ , donde  $Ap1=L1-Vc$  y  $Ap2=L2-Vc$ , con  $Vc = 0,00155 (u.t.)^{-1}$  dado por Muzzio et al. (2005).

caóticas de parcialmente caóticas. Además, en un sistema no lineal no integrable, en resonancias aisladas, la separatriz se transforma en una capa estocástica y por tanto una órbita atrapada en ella tendrá la posibilidad de difundir en una dirección transversal a la misma. Como la capa estocástica tiene un ancho finito, esta difusión está acotada. Por ello sería esperable que, una órbita que se encuentra atrapada en una capa estocástica de una determinada resonancia se comporte en forma similar a las regulares que están dentro de ella (ver Cincotta (2002)).

## 2.2. Sobre las órbitas *MVM*

Analizaremos un conjunto particular de las 3472 órbitas estudiadas: aquellas clasificadas como regulares por Muzzio et al. (2005), para las cuales sin embargo el MEGNO reveló un comportamiento de tipo caótico. A fin de determinar fehacientemente la naturaleza de su comportamiento, para aquellas con los mayores valores del MEGNO (órbitas *MVM*) se calculó la evolución del  $\langle \delta(t) \rangle$  definido por  $\langle \delta(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t \delta(t) dt$ , donde  $\delta = \|\vec{\delta}\|$ , con  $\vec{\delta}$  solución de las ecuaciones variacionales, lo cual nos brindaría una correcta interpretación sobre el tipo de movimiento que puedan desarrollar. En la Fig. 2(a), presentamos la evolución secular del  $\langle \delta(t) \rangle$  de las órbitas mencionadas y en la Fig. 2(b) presentamos la evolución del MEGNO para las mismas órbitas. Este valor medio subestima el valor del  $\delta(t)$  en el caso de crecimiento exponencial en un factor  $t^{-1}$ .

Como se ve en la ampliación de la Fig. 2(a), tenemos una evolución de tipo lineal del  $\langle \delta(t) \rangle$  para tiempos cortos, pero a medida que el tiempo aumenta (gráfico completo), la evolución se torna exponencial. Por tanto, la solución de las ecuaciones variacionales revela la naturaleza caótica de estas órbitas. En la Fig. 2(b) presentamos la evolución del MEGNO para estas mismas órbitas *MVM*. A tiempos cortos (ver ampliación) las órbitas parecen ser regulares, pero para tiempos largos el indicador confirma su irregularidad.

Esta deficiencia en la clasificación realizada por Muzzio et al. (2005) utilizando los LCNs se debe a la necesidad de establecer un valor de corte, que los autores fijan en forma empírica como  $Vc = 0,00155 (u.t.)^{-1}$ .

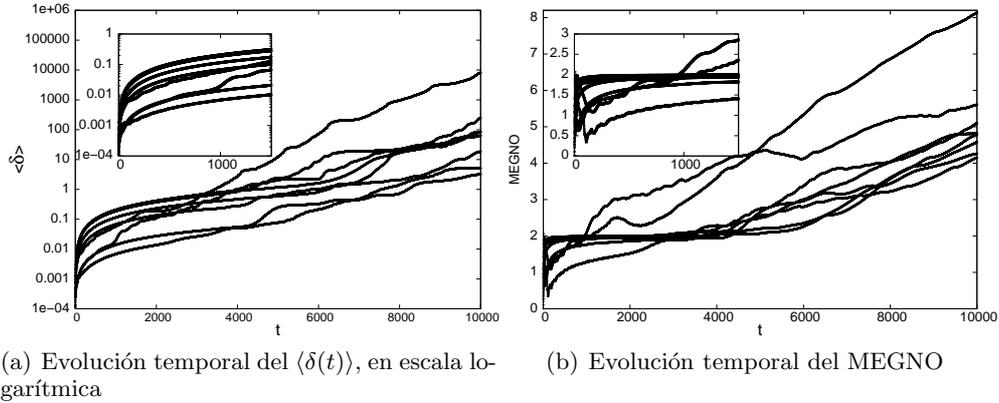


Figura 2. Evolución temporal del  $\langle \delta(t) \rangle$  y del MEGNO. Cada figura cuenta con una ampliación que se extiende hasta las 1500 u.t.

### 3. Conclusiones

En los experimentos realizados el MEGNO logró clasificar correctamente como caóticas las órbitas *MVM*. Para las órbitas caóticas que caen dentro de la pequeña región que comprende al valor crítico, el MEGNO acusó diferencias entre ellas en cuanto a la medida de hiperbolicidad, gracias a la gran dispersión en los valores obtenidos para el MEGNO. Respecto a las órbitas parcialmente caóticas, la clasificación del MEGNO las liga a una naturaleza irregular. Señalamos además, que los tiempos de cómputo requeridos para el cálculo del MEGNO fueron del orden de un día, extremadamente inferiores a los necesarios para el cálculo de los LCNs.

Luego, el MEGNO respondió eficientemente como un indicador rápido de la dinámica global en un potencial que modela en forma realista una galaxia elíptica.

### Referencias

- Cincotta, P.M., 2002, *New Astronomy Reviews*, 46, 13  
 Cincotta, P.M., Giordano, C.M. & Simó, C., 2003, *Phys. D*, 182, 151  
 Cincotta, P.M. & Simó, C., 2000, *A&AS*, 147, 205  
 Giordano, C.M. & Cincotta, P.M., 2004, *A&A*, 423, 745  
 Goździewski, K. & Konacki, M., 2004, *ApJ*, 610, 1093  
 Muzzio, J.C., Carpintero, D.D. & Wachlin, F.C., 2005, *CeMDA*, 91, 173-35, 67