

# Análisis de las soluciones de distintos problemas de la transferencia de calor que involucran series de Fourier-Bessel

Michael Ramos Apablaza – María Fernanda Giordana – Griselda Itovich – Claudio Orbanich  
Sede Alto Valle y Valle Medio – Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente – Sub Sede Villa Regina

## Resumen

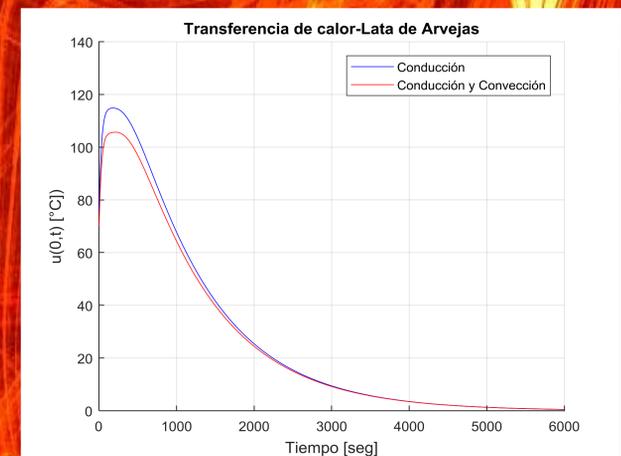
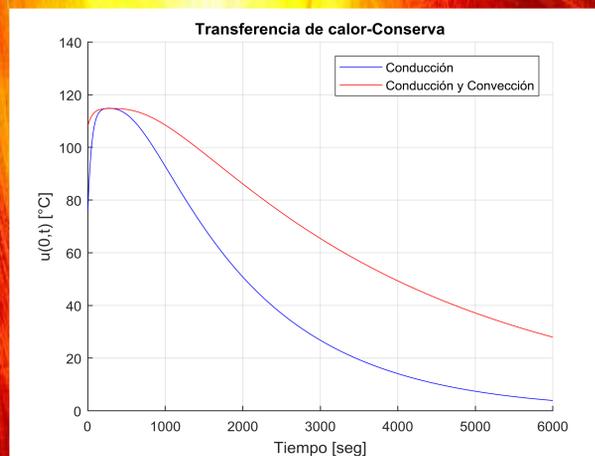
El planteo y resolución del modelo axisimétrico de la transferencia de calor en cilindros sólidos, por conducción y convección, lleva al estudio de las funciones de Bessel, en el contexto de la teoría de Sturm-Liouville. La resolución de tales problemas por separación de variables está ligada con dos aspectos centrales a considerar. El primero es la determinación de los autovalores particulares de cada problema. En segundo lugar, sigue la construcción de la solución del problema en forma de serie de Fourier-Bessel. Los modelos analizados quedan planteados en general involucrando uno o más parámetros como la conductividad térmica del material del sólido y también el coeficiente de calor por convección. De esta forma, se dará en detalle la forma de las soluciones de algunos de tales problemas. Posteriormente y con la ayuda de programas de computación apropiados, se analizarán y mostrarán soluciones aproximadas, observando entre otros aspectos, la incidencia que tienen los parámetros involucrados en los modelos.

## Desarrollo

En este trabajo se analizó la evolución en el tiempo de los perfiles de temperatura en el centro de una lata de distintos alimentos, cuya altura permite analizarlos como si fueran cilindros infinitamente largos. Se expone lo obtenido para dos productos, puré de arvejas y una conserva desconocida (x), luego de un proceso de esterilización. Se considera que al ambiente donde inmediatamente son expuestos tienen una cierta temperatura constante; el puré es expuesto a una atmósfera gaseosa y la conserva a un baño líquido. Se analiza considerando dos mecanismos de transmisión de calor distintos: conducción (Caso 1) y conducción-convección (Caso 2).

Parámetros característicos de los sistemas a evaluar		
	Puré de arvejas	Conserva X
Temperatura inicial (m)	115°C	115°C
Radio (R)	3.4 cm	5 cm
Densidad ( $\rho$ )	1089.26 kg/m <sup>3</sup>	900 kg/m <sup>3</sup>
Calor específico (Cp)	0.91 Kcal/kg.°C	0.84 Kcal/kg.°C
Coefficiente de conducción (K)	0.714 Kcal/h.m.°C	0.75 Kcal/h.m.°C
Coefficiente de convección (h)	3271.2 Kcal/h.m <sup>2</sup> .°C	30 Kcal/h.m <sup>2</sup> .°C
Tiempo de evaluación	1.67 h	1.67 h

	Caso 1	Caso 2
Ecuación general	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0$	
Condición inicial	$u(r, 0) = f(r)$	
Condiciones de frontera	$u(R, t) = 0$	$k \frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = -hu(R, t)$
$f(r)$	$m$	
$u(r, t)$	$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 \alpha^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{R}\right)$	
$\alpha$ (Difusividad térmica)	$\alpha^2 = \frac{k}{\rho c_p}$	
Número de Biot	–	$Bi = \frac{hr}{k}$
Condiciones para autovalores	$\lambda_n = \frac{\gamma_n}{R}, J_0(\gamma_n) = 0$	$\lambda_n = \frac{\gamma_n}{R}, \gamma_n J_1(\gamma_n) = -Bi J_0(\gamma_n)$
$\lambda_1$	2.41	2.38
$\lambda_2$	5.52	5.48
$\lambda_3$	8.65	8.59
$\lambda_4$	11.79	11.71
$A_n$	$A_n = \frac{2m}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}$	$A_n = \frac{2m \gamma_n J_1(\gamma_n)}{(\gamma_n^2 + h^2) J_0^2(\gamma_n)}$



## Conclusión

Al comparar el mismo fenómeno en diversos tipos de alimentos observamos que poseen un comportamiento parecido cuando se aprecia la transmisión calórica por conducción únicamente. Las curvas obtenidas tienen pendientes similares, al igual que los picos al comenzar la corrida. Debemos considerar que los picos en sí no forman parte del comportamiento real del proceso, sino que vienen del hecho de modelarlo en una serie; nos dan idea de a que  $u(r, t)$  comienza la transferencia calórica.

Cuando se compara el comportamiento de la transmisión analizada con los mecanismos de conducción y convección en simultáneo, el resultado obtenido depende en gran medida de las constantes físicas propias del sistema a analizar. En el caso del puré de arvejas, las gráficas obtenidas al comparar ambos tipos de análisis muestran que sólo se separan una de otra al comienzo; luego poseen la misma tendencia general a lo largo del tiempo. Esto no se puede generalizar ya que en otros casos observamos que dependiendo de los parámetros característicos de cada sistema esta discordancia se puede hacer mucho más pronunciada y hallarse a lo largo de todo el gráfico; como ejemplo de esto podemos observar lo que sucede en las gráficas de la conserva x. Lo que detectamos como posible factor responsable de tal fenómeno es la dimensión del coeficiente de convección; en su valor influyen tanto las características térmicas propias del alimento junto con las propiedades del medio circundante en el que se da el proceso de enfriamiento. Observamos que en el caso de la conserva este parámetro

es de una magnitud 100 veces más grande que en el caso del puré; esto se lo atribuimos a la presencia de agua mucho más abundante en el primer caso que en el segundo, lo que a su vez se ve reforzado con el hecho de que el primer caso está sumergido en un medio acuoso y el segundo en uno gaseoso. Creemos que la poca movilidad molecular que poseen las moléculas en estado líquido con respecto a las de estado gaseoso son las que entorpecen y retrasan el mecanismo de transferencia calórica, lo que conlleva a una discordancia muy pronunciada con respecto a la gráfica en la que se considera solo conducción.

Las expresiones  $u(r, t)$ , como se parecía arriba, son series con infinitos términos. El análisis aquí presentado se realizó con los primeros cuatro términos de dichas series. Al agregarle más términos se puede apreciar mayor suavidad en el pico de los primeros segundos; a  $t=0$  varía el lugar donde arranca la curva. Al considerar términos superiores a 20 podemos ver como este pico prácticamente desaparece mostrando un comportamiento más acorde con el proceso real; arrancan del valor de temperatura inicial.

Al finalizar el análisis pudimos apreciar como es factible resolver expresiones analíticas sumamente complejas mediante plataformas computacionales de fácil acceso en cuestión de minutos. En estos casos la complejidad se traslada al hecho de poder diseñar programas que resuelvan las expresiones que deseamos, y ya no la expresión en sí.

## Bibliografía

- Boles, Cengel, *Termodinámica*, Sexta edición, Mc Graw Hill, México, 2009.Sfsf
- Boyce, DiPrima, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Quinta edición, Limusa Wiley, México, 2010.
- Edwards, Penney, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Cuarta edición, Pearson educación, México, 2009.
- Tolstov, G. P., *Fourier series*, Dover, Nueva York, 1976.
- Rafael Emiro Díaz Herazo, Luis Guillermo Obregon Quiñones, Guillermo Eliecer Valencia Ochoa, *Development of an Educational Software in Matlab® for Transient Heat Transfer Analysis*, Contemporary Engineering Sciences, Vol. 10, 2017, no. 20, 953 - 961 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com https://doi.org/10.12988/ces.2017.79102
- Kaitlyn Parsons, Tyler Reichanadter, Andi Vicksman, Harvey Segur, *Explicit Solution for Cylindrical Heat Conduction*, American Journal of Undergraduate Research, Volume 13, Issue 2, June 2016