CÁLCULO DEL SEGUNDO COEFICIENTE DE LYAPUNOV USANDO UN MÉTODO EN FRECUENCIA

Jorge L. Moiola[†, ‡], Franco S. Gentile[⋆, †] y Griselda R. Itovich[*]

[†] *Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIE (UNS-CONICET), Bahía Blanca, Argentina, jmoiola@uns.edu.ar*
[‡] *Dpto. de Ingeniería Eléctrica y Computadoras, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*
[⋆] *Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, fsgentile@gmail.com*
[*] *Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente, Sede Alto Valle y Valle Medio, Universidad Nacional de Río Negro, Villa Regina, Argentina, gitovich@unrn.edu.ar*

Resumen: Los coeficientes de Lyapunov o coeficientes de curvatura, permiten conocer la estabilidad de soluciones periódicas que nacen a partir de bifurcaciones de Hopf en ecuaciones diferenciales. En este artículo se presenta un cálculo mejorado con respecto del existente en la literatura, del segundo coeficiente de curvatura, utilizando un método en frecuencia. Este coeficiente permite tipificar una bifurcación de Hopf degenerada, cuando el primer coeficiente es nulo, condición que está asociada a la aparición de múltiples oscilaciones.

Palabras clave: *coeficientes de Lyapunov, ciclos límites, método frecuencial*
2000 AMS Subject Classification: 34C07 - 34C25 - 93C10

1. INTRODUCCIÓN

Los coeficientes de Lyapunov son expresiones complicadas que determinan la estabilidad de las órbitas periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales cuando se someten a la variación de parámetros distintivos, también denominados parámetros de bifurcación. A estos coeficientes se los conoce también con el nombre de Bautin por ser el primer investigador que los calculó en un sistema diferencial planar con no-linealidad cuadrática [1]. Un enfoque más moderno permite calcularlos mediante el método de Lyapunov-Schmidt [2] y claramente están relacionados con la segunda parte del famoso Problema 16 enunciado por Hilbert, que se refiere a la cantidad de ciclos límites en sistemas planares polinomiales. Otros cálculos equivalentes pueden consultarse en [3] y [4]. Más específicamente, en [4] se aprecia su utilidad en la generación de estructuras de múltiples ciclos límites (o atractores periódicos) en el espacio de parámetros. En este trabajo se realizará una expansión más precisa que la indicada en [5] siguiendo una metodología enraizada en la teoría de control realimentado y las series de Taylor, conocida como el método en el dominio frecuencia. Por último se mostrarán los resultados en un ejemplo conocido de la literatura específica.

2. COEFICIENTES DE ESTABILIDAD EN LA EXPANSIÓN DE 4 ARMÓNICOS

La metodología en frecuencia parte de representar un sistema en forma de lazo realimentado, que consta de una parte lineal con función de transferencia $G(s)$ con una realimentación no lineal [5, 6]. Se busca capturar la presencia de una oscilación de una dada frecuencia $\hat{\omega}$, causada por una bifurcación de Hopf, utilizando un balance de armónicos. Dicha bifurcación está causada por el cruce de un par de autovalores complejos conjugados de la linealización, a través del eje imaginario, al variar un único parámetro. Para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, dichos autovalores son de la forma $s = \alpha \pm i\omega$, con $|\hat{\omega} - \omega| \ll 1$. Entonces, G admite una representación de Taylor alrededor de $i\hat{\omega}$, de la forma

$$G(i\hat{\omega}) = G(s) + (-\alpha + i\delta\omega)G'(s) + \tfrac{1}{2}(-\alpha + i\delta\omega)^2 G''(s) + \dots\,, \tag{1}$$

donde $\delta\omega = \hat{\omega} - \omega$, $G'(s) = dG/ds$ y $G''(s) = d^2G/ds^2$. La fórmula de balance de armónicos, que relaciona las componentes frecuenciales a la entrada y salida del subsistema lineal, está dada por (véase [5, 6]):

$$[G(i\hat{\omega})J + I] \sum_{j=0}^{q} V_{1,2j+1}\theta^{2j+1} = -G(i\hat{\omega}) \sum_{j=1}^{q} W_{1,2j+1}\theta^{2j+1}\,, \tag{2}$$

donde J representa la matriz Jacobiano de la realimentación no lineal evaluada en el equilibrio y las expresiones de $V_{1,2q+1}$ y $W_{1,2q+1} = p_q$, $q = 1, 2, \dots$, se conocen en forma explícita [5, 6]. Reemplazando (1) en (2) y definiendo $z := \alpha - i\delta\omega$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}&\left[GJ - zG'J + \tfrac{1}{2}z^2G''J + \ldots + I\right](V_{11}\theta - zV'_{11}\theta + V_{13}\theta^3 + V_{15}\theta^5 + \ldots - zV'_{13}\theta^3 - zV'_{15}\theta^5)\\ &\qquad = -\left[G - zG' + \ldots\right] \times \left[W_{13}\theta^3 + W_{15}\theta^5 - zW'_{13}\theta^3 - zW'_{15}\theta^5 + \ldots\right],\end{aligned} \tag{3}$$

donde se ha omitido el argumento s en G y sus derivadas por simplicidad. Multiplicando ambos miembros de (3) a izquierda por la expansión del autovector izquierdo $u^\top$ de GJ asociado al autovalor -1, es decir, $u^\top - zu'^\top + \frac{1}{2}z^2u''^\top + ...$, se obtiene

$$\begin{aligned}&-u^\top G'JzV_{11}\theta + u^\top G'Jz^2V'_{11}\theta - u^\top G'JzV_{13}\theta^3 + \tfrac{1}{2}u^\top G''Jz^2V_{11}\theta\\ &+u'^\top GJz^2V'_{11}\theta - u'^\top GJzV_{13}\theta^3 + u'^\top z^2V'_{11}\theta - u'^\top zV_{13}\theta^3 + u'^\top G'Jz^2V_{11}\theta\\ &\qquad = -u^\top GW_{13}\theta^3 + u^\top GzW'_{13}\theta^3 - u^\top GW_{15}\theta^5 + u^\top G'zW_{13}\theta^3 + u'^\top GzW_{13}\theta^3 + \ldots.\end{aligned} \tag{4}$$

Igualando los términos de menor orden en θ, se llega a $z = \alpha - i\delta\omega = u^\top GW_{13}\theta^2/(u^\top G'JV_{11}) = \gamma_1\theta^2$. Por definición, $\sigma_1 = -\Re(\gamma_1)$ es el *primer coeficiente de curvatura*, siendo $\Re(\cdot)$ la parte real de una cantidad compleja. Reemplazando la expresión de γ_1 en (4) y agrupando los coeficientes en potencias de θ^5, se puede escribir

$$\begin{aligned}&\gamma_1^2u^\top G'JV'_{11} - \gamma_1u^\top G'JV_{13} + \tfrac{1}{2}\gamma_1^2u^\top G''JV_{11} + \gamma_1^2u'^\top GJV'_{11} - \gamma_1u'^\top GJV_{13} + \gamma_1^2u'^\top V'_{11}\\ &\qquad -\gamma_1u'^\top V_{13} + \gamma_1^2u'^\top G'JV_{11} = \gamma_1u^\top GW'_{13} - u^\top GW_{15} + \gamma_1u^\top G'W_{13} + \gamma_1u'^\top GW_{13},\end{aligned}$$

que a su vez, reagrupando según las potencias de γ_1, se puede ordenar como

$$\begin{aligned}\Phi := \gamma_1^2&\left\{u^\top\left[G'JV'_{11} + \tfrac{1}{2}G''JV_{11}\right] + u'^\top\left[(GJ+I)V'_{11} + G'JV_{11}\right]\right\}\\ &-\gamma_1\left\{u^\top\left[G'(JV_{13} + W_{13}) + GW'_{13}\right] + u'^\top\left[(GJ+I)V_{13} + GW_{13}\right]\right\} + u^\top GW_{15} = 0.\end{aligned}$$

Entonces, se define el *segundo coeficiente de curvatura* como

$$\sigma_2 = -\Re\left(\Phi/\eta\right), \qquad \eta := u^\top G'JV_{11}, \tag{5}$$

Nótese que si $\gamma_1 = 0$ entonces la expresión anterior se reduce a $\sigma_2|_{\gamma_1=0} = -\Re(u^\top GW_{15}/\eta)$. Por otra parte, los cálculos anteriores se reducen notablemente cuando los autovectores de GJ no dependen de s ($u'^\top = V'_{11} = 0$), resultando en

$$\sigma_2 = -\Re\left\{\frac{u^\top}{\eta}\left[\tfrac{1}{2}\gamma_1^2G''JV_{11} - \gamma_1G'(JV_{13} + W_{13}) - \gamma_1GW'_{13} + GW_{15}\right]\right\}, \tag{6}$$

que coincide con los resultados presentados en [5].

3. EJEMPLO

Se considera el sistema propuesto en [3], dado por

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} &=& -y + ax^2 + bx^3,\\ \dot{y} &=& x + dx^2 + gx^3 + hx^4.\end{array}\right. \tag{7}$$

Para su análisis utilizando el método en frecuencia (véase [5]), se elige la realización

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1\\ 1/2 & 0\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C = [1\ \ 0],\ f(e) = \begin{bmatrix} -e + ae^2 - be^3\\ -\frac{1}{2}e + de^2 - ge^3 + he^4\end{bmatrix}, \tag{8}$$

donde, de acuerdo a la elección de C, resulta $e = -x$. Definiendo el vector $X := [x\ \ y]^\top$, (8) se puede representar como el sistema realimentado

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X} &=& AX + Bf(e),\\ e &=& -CX.\end{array}\right. \tag{9}$$

Es sencillo verificar que las matrices $W_C = [B\ AB]$ y $W_O = \left[\begin{smallmatrix} C \\ CA \end{smallmatrix}\right]$ tienen rango completo, por lo cual la realización escogida hace que (9) sea un sistema controlable y observable. Además, aplicando la transformada de Laplace en (9) se llega a un sistema lineal, dado por una función de transferencia $G(s)$ con una realimentación no lineal f, donde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + s + 1/2}\left[s \quad -1\right].$$

Los puntos de equilibrio verifican la ecuación $G(0)f(e) = -e$, de donde se deduce que un punto de equilibrio es $\widehat{e} = 0$, y los otros (posibles) son las soluciones de la ecuación $1 - de + ge^2 - he^3 = 0$. En lo que sigue, se analizará la dinámica emergente alrededor de $\widehat{e} = 0$. Para ello, se comienza calculando la matriz Jacobiano de f alrededor de dicho equilibrio, es decir,

$$J := \left[\frac{df}{de}\right]\bigg|_{\widehat{e}=0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

La estabilidad del equilibrio está determinada por los autovalores de la matriz $G(s)J$, pero como la misma resulta escalar, sólo es necesario considerar la función característica

$$\lambda(s) := G(s)J = -\frac{s - 1/2}{s^2 + s + 1/2}.$$

La condición de bifurcación de Hopf está dada por $\lambda(i\omega) = -1$, que resulta en la solución $\omega_0 = 1$. Nótese que esta solución es independiente de los parámetros del sistema, es decir, que el sistema (8) se halla en un punto de bifurcación de Hopf, para cualquier combinación de parámetros. Esto se debe a que la variación de dichos parámetros, no modifica los términos lineales en (8). Por otra parte, la función de transferencia de lazo cerrado se define como

$$H(s) = [1 + G(s)J]^{-1}\, G(s) = \tfrac{1}{s^2+1}\left[s \quad -1\right].$$

Como la matriz $G(s)J$ es escalar, sus autovectores derecho e izquierdo son $V_{11} = 1$ y $u = 1$, respectivamente. Además el vector V_{13} es nulo. Las derivadas de alto orden de f resultan

$$D_2 := \left[\frac{d^2f}{de^2}\right]\bigg|_{\widehat{e}=0} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2d \end{bmatrix}, \quad D_3 := \left[\frac{d^3f}{de^3}\right]\bigg|_{\widehat{e}=0} = \begin{bmatrix} -6b \\ -6g \end{bmatrix}, \quad D_4 := \left[\frac{d^4f}{de^4}\right]\bigg|_{\widehat{e}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24h \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, se obtienen los vectores

$$V_{02} = -\tfrac{1}{4}H(0)D_2V_{11}\overline{V}_{11} = \tfrac{d}{2}, \qquad V_{22} = -\tfrac{1}{4}H(2i)D_2V_{11}V_{11} = \tfrac{1}{6}(-d + 2ai),$$

donde $\overline{(\cdot)}$ denota el complejo conjugado. Con esto, y teniendo en cuenta la expresión $p_1 := W_{13} = D_2(\frac{1}{2}\overline{V}_{11}V_{22} + V_{11}V_{02}) + \frac{1}{8}D_3\overline{V}_{11}V_{11}^2$, se obtienen

$$G(i)p_1 = \tfrac{1}{12(-1/2+i)}\left[9g - 4a^2 - 10d^2 + (6ad - 9b)i\right], \quad \eta := u^\top G'(i)JV_{11} = -\tfrac{2+i}{(-1/2+i)^2},$$

y luego

$$\gamma_1 = \frac{u^\top G(i)p_1}{\eta} = -\frac{1}{24}\left[9b - 6ad + (9g - 4a^2 - 10d^2)i\right]. \tag{10}$$

El primer coeficiente de Lyapunov o primer coeficiente de curvatura, cuyo signo determina la estabilidad del ciclo límite que nace de la bifurcación de Hopf, está dado por $\sigma_1 := -\Re(\gamma_1) = \frac{1}{8}(3b - 2ad)$. Por lo tanto, si se verifica que $2ad = 3b$, el mismo se anula y la información dada por σ_1 no es suficiente para conocer la estabilidad de dicho ciclo. Es importante notar que la parte imaginaria de γ_1 se anula bajo la condición $9g = 4a^2 + 10d^2$. Bajo la condición $\sigma_1 = 0$, es necesario calcular el segundo coeficiente de curvatura para tipificar la bifurcación de Hopf. Para ello, se calculan en primer lugar los vectores cuyas expresiones pueden verse en [5] (que resultan escalares en este caso):

$$\begin{aligned} V_{33} &= \tfrac{1}{96}\left[2d^2 + 3g - 12a^2 - (10ad + 9b)i\right], \qquad V_{04} = \tfrac{1}{72}(19d^3 + 4a^2d - 45dg + 27h), \\ V_{24} &= \tfrac{1}{288}\left[144ab - 32a^2d + 14d^3 + 45dg - 48h + (54ag - 24a^3 - 50ad^2 - 87bd)i\right]. \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la siguiente expresión

$$p_2 := W_{15} = \tfrac{D_2}{2}(2V_{11}V_{04}+2V_{02}V_{13}+\overline{V}_{22}V_{33}+\overline{V}_{11}V_{24}+\overline{V}_{13}V_{22})+\tfrac{D_3}{8}(4V_{11}V_{02}^2+V_{11}^2\overline{V}_{13}+\overline{V}_{11}^2V_{33}$$
$$+4\overline{V}_{11}V_{02}V_{22}+2V_{11}V_{22}\overline{V}_{22}+2V_{11}\overline{V}_{11}V_{13})+\tfrac{D_4}{48}(V_{11}^3\overline{V}_{22}+6V_{11}^2\overline{V}_{11}V_{02}+3V_{11}\overline{V}_{11}^2V_{22})+\tfrac{D_5}{192}V_{11}^3\overline{V}_{11}^2,$$

se obtiene

$$G(i)p_2 = \tfrac{1}{1152(-1/2+i)}\left[48a^4-660d^4+204a^2d^2-120a^2g+396abd+1908d^2g-2016dh\right.$$
$$\left.-81b^2+27g^2+(848ad^3+32a^3d-984adg+288ah+336a^2b-312bd^2-108bg)i\right]. \tag{11}$$

Nótese que como el autovector V_{11} es constante (no depende de la variable compleja s), resulta $p_1' := W_{13}' = \frac{dp_1}{ds}|_{s=i\omega_0} = D_2(\frac{1}{2}\overline{V}_{11}V_{22}'+V_{11}V_{02}')$, donde

$$V_{22}' = -\tfrac{1}{4}H'(2i)D_2V_{11}^2 = -\tfrac{1}{18}(5a+4di), \qquad V_{02}' = -\tfrac{1}{4}H'(0)D_2V_{11}\overline{V}_{11} = -\tfrac{a}{2},$$

con lo cual finalmente se obtiene $p_1' = -\frac{1}{18}(23a+4di)\,[a \quad d]^T$. Utilizando esta expresión en conjunto con (10)-(11) y teniendo en cuenta que $p_1 = W_{13}$ y $p_2 = W_{15}$, es posible evaluar el segundo coeficiente de curvatura dado por (6). Reemplazando todas las cantidades obtenidas anteriormente, el mismo resulta

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{192}\left\{4a^3d+8ad^3+16adg+6a^2b+18bd^2-24ah+9bg\right\}.$$

Bajo la condición $\sigma_1 = 0$ ($2ad = 3b$), la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_2 = \tfrac{a}{96}\left\{d(4a^2+10d^2)+11dg-12h\right\},$$

y utilizando también la condición $\Im(\gamma_1) = 0 \iff 4a^2+10d^2 = 9g$, finalmente se obtiene $\sigma_2 = \frac{a}{24}\{5dg-3h\}$, donde $\Im(\cdot)$ denota la parte imaginaria. Suponiendo que $a \neq 0$, la condición para que se anule el segundo coeficiente de curvatura es $5dg-3h=0$, idéntico resultado al presentado en [3].

4. Conclusiones

En el presente artículo se mostró el desarrollo de un cómputo más preciso y general del segundo coeficiente de estabilidad para la bifurcación de Hopf, mejorando las fórmulas conocidas, que emplean la metodología en el dominio frecuencia. En el ejemplo estudiado se calcularon todos los vectores auxiliares con dicha metodología, verificando los resultados de otros autores independientes. Los resultados obtenidos dan lugar a distintas aplicaciones, como la detección de configuraciones de múltiples órbitas periódicas siguiendo con el análisis de estabilidad de las mismas y sus posibles bifurcaciones, usando aproximaciones cuasianalíticas.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación del PGI 24/K087 de la Universidad Nacional del Sur y del PI $40/A806$ de la Universidad Nacional de Río Negro.

Referencias

[1] N. N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Amer. Math. Soc. Transl. Vol. 100, Providence, RI (1954).

[2] W. W.Farr, C. Z. Li, I. S. Labouriau, W. F. Langford, *Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th problem*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, No. 1, pp. 13-30 (1989).

[3] A. Gasull, A. Guillamon, V. Mañosa, *An explicit expression of the first Liapunov and period constants with applications*, J. Math. Anal. Apps., Vol. 211, pp. 190-212 (1997).

[4] P. Yu, G. R. Chen, *Computation of focus values with applications*, Nonlinear Dynamics, Vol. 51, pp. 409-427 (2008).

[5] J. L. Moiola and G. R. Chen *Hopf Bifurcation Analysis. A Frequency Domain Approach*, World Sci. Series on Nonl. Science, Series A, Vol. 21, World Scientific, Singapore, 1996.

[6] A. I. Mees *Dynamics of Feedback Systems*, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1981.