

Título: El abordaje de conceptos de matemática en proyectos interdisciplinarios. El caso de modelizaciones de vectores para comprender y actuar.

Autor: Pablo Carranza

Doctor en didáctica de la matemática

Profesor investigador en Universidad Nacional de Río Negro

Argentina

pcarranza@unrn.edu.ar

Tema y problemática:

Diversidad, Inclusión y aprendizaje

9. Nuevos escenarios de aprendizaje: aprendizaje basado en problemas, aprendizaje cooperativo-colaborativo a través de redes, aprendizaje servicio, aprendizaje en línea, aprendizaje basado en desafíos, aprendizaje distribuido

Introducción

En este capítulo compartiremos parte de los resultados obtenidos en el marco de un proyecto de investigación llevado a cabo en la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina, (UNRN) donde nos interesamos a las potencialidades y dificultades que presentan los proyectos interdisciplinarios como propuestas pedagógico-didácticas para el abordaje de conceptos disciplinares.

El proyecto interdisciplinario en cuestión se desarrolló a partir de la cátedra de Matemática, donde estudiantes del primer semestre del primer año de la Tecnicatura Superior en Mantenimiento Industrial (TSMI) calcularon, construyeron e instalaron molinos del tipo Savonius (Savonius, 1922) destinados a pobladores rurales de escasos recursos del norte de la Patagonia Argentina.

Por razones de espacio, retendremos aquí solamente un ejemplo de potencialidad observada: la referida a las posibilidades de abordar con los estudiantes el concepto de vector desde un enfoque interdisciplinar y a partir de necesidades que derivan del proyecto.

Construcciones teóricas

Nuestro interés por analizar las potencialidades y dificultades de los proyectos interdisciplinarios como marco para el abordaje de conceptos y métodos disciplinares (Crombie, 1980; Hacking, 2002), se encuentra asociado al de proponer contextos donde el aprendizaje cobre sentido para los estudiantes.

Entendemos que el sentido no es una cualidad que le pertenece a una propuesta didáctica (Develay, 1994, 2004) y de hecho, entendemos también que los saberes tampoco portan un sentido en sí mismos (de Vecchi & Carmona-Magnaldi, 1996). En todo caso adherimos a la idea que postula al sentido como una construcción que un estudiante se realiza, en función de sus vivencias, sus expectativas, sus emociones, etc. Si bien entonces consideramos al sentido como una construcción personal, admitimos también que hay características de la propuesta didáctica que pueden facilitarle al estudiante la apropiación de la misma y así integrarla a sus vivencias, expectativas y emociones.

Algunos autores postulan que el sentido se construye si la propuesta en cuestión es asociada por el estudiante a eventos ya existentes, facilitando así la integración de la misma a su mundo (Jacques, 1987). Otros autores indican que el sentido es una capacidad que posee el estudiante de relacionar lo que hace en su formación con lo que se propone ser (Develay, 1994).

Nuestra posición en este proyecto integra estas dos perspectivas articulando la variable tiempo en dos modalidades: presente y futuro. Más precisamente, proponemos a los estudiantes un contexto donde pretendemos que los saberes en proceso de aprendizaje resulten de utilidad en una doble temporalidad: para el futuro, pero también para el presente.

Otra dimensión retenida a la hora de diseñar la propuesta y fuertemente relacionada a la anterior es la referida a la funcionalidad de los saberes. Entendemos que ellos no solo deben servir para comprender el mundo que les rodea sino también para intervenir en él. Una tercera dimensión es también considerada en el diseño del proyecto, ella se refiere a lo que llamamos la trascendencia de los saberes. En este proyecto, buscamos que los saberes sean vividos como de utilidad para los estudiantes pero también para la comunidad.

Estos tres tipos de dimensiones son integradas en el proyecto a modo de variables didácticas (Brousseau, 1998) consideradas aquí en sentido amplio: ya no para promover la aparición de tal o cual razonamiento o concepto sino para facilitar la construcción de sentido por parte de los estudiantes y esto, desde un punto de vista crítico (de Loiola Araújo, 2019; Skovsmose, 2000, 2005).

De manera esquemática entonces, buscamos facilitar la construcción de sentido en los estudiantes haciendo que la propuesta reúna un conjunto de características que, funcionando de manera interrelacionada, se desarrolla cada una dualmente. Ellas buscan entonces que los saberes emergentes en el proyecto:

- Resulten de utilidad para el futuro y también para el presente
- Sirvan para comprender el mundo pero también para intervenir en él.
- Sean trascendentes deviniendo de beneficio para los estudiantes y para la comunidad.

De las anteriores características se desprenden otras. Una de ellas es que el contexto de la propuesta resulte real. En este sentido, consideramos necesario precisar la interpretación aquí atribuida al término “real” pues en la literatura asume significados variados:

Diremos aquí que un contexto es evocado cuando él existe pero el acceso al mismo por parte de los estudiantes se encuentra intermediado. La intermediación puede ser realizada por el docente, por soportes multimedia, etc.

De la misma manera, un contexto lo consideramos como análogo cuando, si bien puede constituirse en una realidad en sí misma, él sustituye a otro más complejo. Se espera que los razonamientos producidos por los estudiantes en el contexto análogo sean equivalentes a los que se producirían en el contexto de referencia, lo cual justifica la sustitución.

Un contexto lo consideramos como simulado cuando es el fruto de una síntesis de otro contexto. En general, las simulaciones admiten reproducciones imposibles o muy costosas de realizar en el contexto real de referencia.

Por último, un contexto real es considerado aquí como uno donde los estudiantes tienen acceso al mismo sin intermediación y con posibilidades de parte de estos de sumergirse en la problemática de manera directa.

Cabe acotar, por un lado, que esta categorización no pretende ponderar un tipo de contexto por sobre otro. De hecho, como veremos más adelante, el proyecto de los molinos anida en su interior varios tipos de contextos. Por otro lado, destacamos que estas categorías no solamente las admitimos como factibles de ser anidadas sino también de ser interceptadas.

Por último al respecto, y sabiendo de la existencia de otros tipo de categorizaciones según la problemática de interés (Brown, 2019), diremos que inscribimos la propuesta de este proyecto interdisciplinario en esta última categoría, la de contexto real, agregando que la solución construida por los estudiantes también se inscribe en el contexto real pues ella no es una maqueta, ni un plano, ni un esquema sino que resulta ser un molino real para extraer agua en puestos rurales.

Otra característica que se desprende de las anteriores es la dinámica de la relación entre el contexto y los saberes “a enseñar” (Chevallard, 1985). En general esta dinámica tiene una dirección que va desde el saber o los saberes a abordar retenidos por el docente hacia el contexto adecuado que los hace emerger. Así, el docente suele elegir un concepto y luego busca eventualmente un contexto que le dé sentido a ese concepto (Czocher, 2019; Stillman, 2019).

En este caso, la dinámica es diferente: se eligió un proyecto, se analizó a priori sus potencialidades (y dificultades) y se lo llevo a cabo (Caron, 2019). Por su intencional complejidad y riqueza el proyecto convocó un conjunto importante de saberes, no solo de matemática, sino también de física, de estadística, y de otros campos disciplinares.

En ese análisis a priori y a los fines de preservar la coherencia de la propuesta, la lógica de aparición de los conceptos no podía responder a un lineamiento de la lógica curricular disciplinar sino que debía respetar la lógica del proyecto. Es decir que un concepto de interés debería ser abordado cuando él representase un aporte a las necesidades del proyecto.

Así, el proyecto se planificó con desarrollo en dos direcciones lógicas: Las cuestiones a resolver en el proyecto (lógica del proyecto) determinarían la cronología de convocación de saberes. A su vez, la aparición de esos saberes demandaría abordajes al interior de la disciplina (lógica disciplinar).

Estas dos lógicas no se vinculan de una manera directa sino por medio principalmente de sucesivas modelizaciones; entendiendo por modelización aquí, a un proceso mental

consistente básicamente en relacionar elementos del contexto con entes abstractos disciplinares y esto a fines de producir relaciones nuevas en el plano de los entes abstractos que resultan de utilidad para el contexto de referencia que motivó el proceso (Blomhøj, 2019).

En nuestro caso, el contexto de referencia lo constituye el proyecto y la necesidad de resolver problemas que en él surgen (Stillman, 2019). Los conceptos disciplinares emergen entonces en el marco precisamente de los procesos mentales que se producen en las modelizaciones (Blomhøj, 2019; Czocher, 2019). Nosotros trataremos aquí una problemática que convocó dos modelizaciones donde aparece, entre otros, el concepto de vector.

La Figura 1 ilustra esta dinámica de dos lógicas: la flecha horizontal representa el desarrollo cronológico del proyecto. Ese desarrollo implica resolver cuestiones racionalmente (círculos negros).

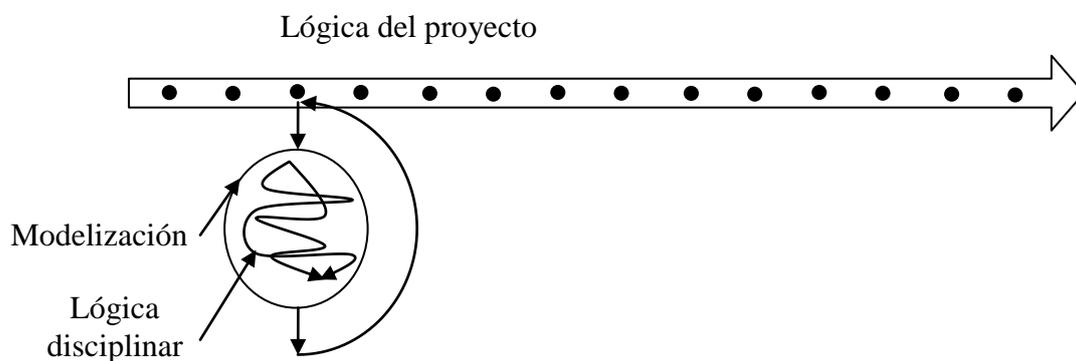


Figura 1. Articulación de lógicas en el proyecto.

Fuente: Elaboración propia

El abordaje, necesariamente racional, de cada cuestión requiere en general de una modelización para ser tratado. La modelización convoca en su interior conceptos de la lógica disciplinar. Las conclusiones construidas en la modelización regresan al proyecto, aportando una respuesta fundada en argumentos racionales. Así, la resolución del problema permite avanzar en el proyecto.

En este caso entonces se trata de modelizaciones tanto descriptivas como prescriptivas, las primeras se caracterizan por sus potencialidades para comprender un fenómeno, las

segundas por sus contribuciones para intervenir racionalmente en el problema (Stillman, 2019).

Metodología

Dos proyectos entonces se llevaron a cabo, uno de investigación donde nos interesamos a las potencialidades que presentan los proyectos interdisciplinarios y otro donde, a modo de trabajo de campo, se desarrolló el proyecto interdisciplinario con las características descritas en la sección anterior. El financiamiento para el proyecto de investigación provino de la UNRN en tanto que proyecto acreditado. Para el proyecto interdisciplinario de cálculo, construcción e instalación de los molinos, los fondos fueron aportados por la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU). Los datos aquí retenidos corresponden a la cohorte 2018, comenzando los estudiantes el proyecto en marzo de ese año y culminándolo con la instalación en marzo 2019.

La TSMI es una formación universitaria terciaria de tres años de duración. A nivel de infraestructura, cuenta con aulas, proyectores para los docentes, dos pizarras por aula y bancos individuales para los estudiantes.

La arquitectura original prevista para la misma responde a un formato tradicional donde las cátedras no necesariamente se interrelacionan y el aprendizaje es a nivel teórico en general, desarrollándose en las aulas de manera exclusiva. La propuesta de calcular, construir e instalar molinos entonces representó una disrupción respecto del ecosistema pedagógico-administrativo de la TSMI. Por razones de espacio no nos es posible detallar aquí las adaptaciones que tanto el proyecto de los molinos como el ecosistema de la TSMI debieron realizar para que el proyecto se lleve a cabo.

La Figura 2 ilustra el tipo de molino Savonius retenido para el proyecto. Con una altura final de 6 metros, su rotor de eje vertical está construido a partir de material reciclado consistente en tambores de descarte de 200 litros. Así, la energía cinética del viento es convertida por el rotor quien transmite el movimiento por medio de su eje a una bomba a diafragma ubicada en la base del molino.

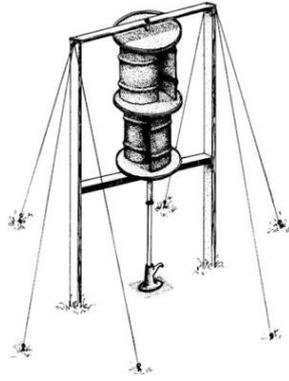


Figura 2. Diseño de molino Savonius desarrollado

Fuente: <http://cepechile.blogspot.com/>

El molino se sostiene en su vertical por medio de riendas tensoras ancladas a bloques de hormigón enterrados en el piso. El sistema cuenta con un freno manual para detener el giro del rotor cuando los vientos son excesivos.

El financiamiento de la SPU permitió la adquisición de los materiales y las herramientas. El traslado de los molinos desde la localidad de construcción (Allen, Río Negro, Argentina) a los puestos rurales estuvo a cargo de los municipios a los cuales pertenecían los puestos rurales (Sierra Colorada y El Cuy). El desplazamiento de los estudiantes a los puestos rurales y los seguros correspondientes lo aportó la misma UNRN.

Por sus características, el proyecto se desarrolló en espacios abiertos, en talleres, en el aula, en los domicilios de los estudiantes, etc. Para el trabajo en talleres se realizó un acuerdo interinstitucional con una escuela técnica de la localidad que permitió a los estudiantes construir las piezas que requerían el uso de tornos. El espacio abierto de trabajo fue facilitado por una productora frutícola de la localidad. En esa chacra los molinos se fueron ensamblando y preparando para su instalación en los puestos rurales. En el proyecto participó el Ente de Desarrollo de la Región Sur colaborando con la identificación de los puestos rurales donde se instalarían los molinos (distantes unos 400 kms del lugar de cursado de la TSMI).

En este capítulo, retenemos uno de los resultados obtenidos en el proyecto, el referido a la posibilidad de abordaje de manera interdisciplinar de conceptos, en particular el de vector. Este concepto aparece por demanda de la lógica del proyecto y esto, para decidir

las características que debía tener todo el sistema de sujeción del molino. El análisis corresponde a instancias de trabajo que se produjeron en el aula y en los puestos rurales.

A lo largo del proyecto fueron registrados:

- Audios de las clases en aula,
- Vídeos en puestos rurales
- Diálogos de estudiantes y docentes en redes sociales
- Vídeos de trabajo de estudiantes y profesores en el espacio abierto (chacra)
- Modelizaciones y representaciones en software tales como Hoja de Cálculo y Geogebra.
- Transcripciones escritas de notas de audio de las clases por parte de uno de los docentes

Formalmente, la cátedra se desarrolla desde marzo a julio, con una distribución de dos encuentros semanales. Se anexó un encuentro de 4 hs los sábados para el trabajo manual de construcción de los molinos. La UNRN contrató seguros adicionales para los estudiantes en esos horarios extras.

En lo que respecta a los estudiantes, se trata de ingresantes a las TSMI. Con edades que oscilan entre los 18 y los 50 años, la proporción de mujeres ronda el 20 % del grupo de unos 40 estudiantes en total. Con orígenes y trayectorias muy diversas, para un alto porcentaje de ellos la TSMI representa retomar estudios luego de muchos años. Uno de los denominadores comunes en los estudiantes es la representación que guardan de la matemática en sus estudios anteriores: la recuerdan como una disciplina teórica, principalmente desarrollada por el docente, donde ellos realizaban ejercicios en papel y donde se evaluaba por medio de exámenes individuales.

Para llevar a cabo el proyecto, se consideró indispensable un cambio en las relaciones que se producen entre todos los actores del proceso de enseñanza aprendizaje. En particular, resultó necesario una reconstrucción del contrato didáctico (Brousseau, 1988) donde los estudiantes dejaran de indagar sobre qué espera el docente de cada uno de ellos y se orientaran hacia la cuestión referida a qué requiere el proyecto de todos. Para ello, una de las primeras actividades fue realizar una visita a un pueblo rural donde se

instalaría uno de los molinos. Este poblado (El Cuy) reunía varias características de interés al proyecto:

- a) él posee un aerogenerador comercial de unos 24m de alto y 17 m de diámetro que fue derribado por el viento dos décadas atrás. Visitar el predio del aerogenerador ayudó a los estudiantes a dimensionar la fuerza del recurso eólico con el que se trabajaría, al mismo tiempo que figurarse sobre los riesgos posibles y la necesidad de un abordaje racional.
- b) hay puestos rurales cercanos donde instalar molinos. La visita permitió a los estudiantes entrar en contacto con el contexto de los pobladores rurales
- a) se encuentra a una relativa corta distancia (150 kms) de la localidad de cursado de la TSMI.

A su vez, se organizaron grupos de trabajo, donde cada uno asumía la responsabilidad de construir una parte del molino. Así, un grupo se ocupó del rotor, otro del freno, otro de la estructura, y otro de las bases y riendas tensoras.

Cabe acotar que parte del equipo de docentes de la cátedra forma parte del equipo de investigación del proyecto. Presentaremos algunos resultados observados respecto del estudio de las riendas tensoras y de cómo el concepto de vector fue abordado de manera interdisciplinar a partir de necesidades del proyecto.

Resultados

El enlace de abajo permite visualizar un vídeo corto referido a la instalación de dos molinos Savonius construidos por los estudiantes de la cohorte 2018 e instalados en marzo del año 2019. El primero corresponde a un puesto rural (La Margarita) en cercanías de El Cuy, el otro a un puesto rural (Horno Viejo) perteneciente al ejido de Sierra Colorada, ambas localidades ubicadas en la Región Sur de la Provincia de Río Negro, Argentina.

<https://www.youtube.com/watch?v=889fvPzVK1g>

Los resultados retenidos en este capítulo se refieren a dos estudios (más uno introductorio) realizados con los estudiantes a los fines de determinar los esfuerzos

sobre las riendas tensoras donde nos centraremos en analizar el abordaje del concepto de vector desde un enfoque interdisciplinario.

Un estudio estadístico anterior permitió a los estudiantes conocer sobre los vientos de la zona donde se instalarían luego sus molinos. Los indicadores obtenidos (medidas de posición y de dispersión) permitirían más adelante estimar la potencia del molino y por ende, el caudal de agua factible de ser extraído de los jagüeles. El valor de velocidad máxima observado (150km/h), resultaría útil a los fines de calcular la estructura del molino, en este caso, de las riendas tensoras.

Las riendas tensoras son cables de acero que sostienen en su vertical al molino; ellas deben resistir los esfuerzos horizontales provocados por los fuertes vientos de la región. La Figura 3 representa las partes de una rienda tensora.

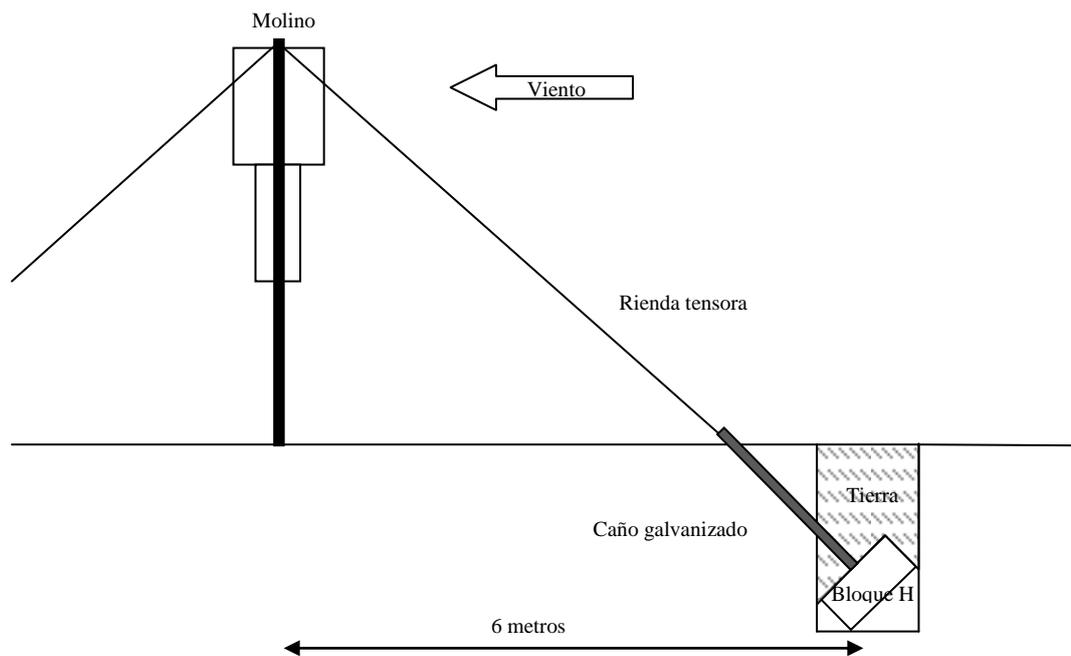


Figura 3. Esquema de rienda tensora en Molino Savonius

Fuente: Elaboración propia

En su parte superior, la rienda tensora va sujeta al molino, a unos 6 metros del suelo. En su parte inferior, ella se fija a un caño galvanizado. Este caño se encuentra solidario a un bloque de hormigón enterrado en un pozo cubierto de tierra. Este pozo, originalmente se ubica a una distancia de 6 metros del pie del molino.

En el análisis a priori de la problemática, los docentes prefirieron desdoblarse el estudio de las riendas tensoras en dos partes, la primera del tipo relacional a realizarse en Geogebra, la segunda donde se cuantificarían los esfuerzos y a desarrollarse en Hoja de Cálculo.

El estudio en Geogebra, que denominamos relacional buscó, según notas de docentes, poner en evidencia los esfuerzos y sus interacciones, pretendiendo lograr en los estudiantes una visión integral de la problemática. Este estudio fue promovido por los docentes a partir de una pregunta que se formuló a los estudiantes luego de haber visitado todos juntos la localidad de El Cuy al inicio de clases:

Docente 1: “Ya hablamos que el molino debemos instalarlo lejos de las viviendas y de los árboles por las turbulencias que podrían producirse, ya sabemos que debemos instalarlo cerca del jagüel, ya sabemos también que queremos anclar las riendas tensoras al piso a 6 metros del pie del molino, ustedes vieron en el campo, hay montes, bloques de piedra, que pueden resultar un obstáculo que nos obligue a colocar las riendas sea más cerca, sea más lejos que los 6 metros previstos, les pregunto ahora, si por un monte o por un bloque de piedra nos ocurre eso, de tener que hacer el pozo más cerca o más lejos de lo previsto. Ese cambio de distancia, hará que los esfuerzos en la rienda cambien? A ver si puedo mejorar la pregunta, si la rienda la tenemos que colocar a 5 metros, la rienda, va a soportar más esfuerzo, menos esfuerzo, igual esfuerzo, que si la colocamos a 6 metros?”

Por razones de espacio no analizamos en detalle aquí las respuestas e intercambios de los estudiantes. Sintetizaremos esa instancia de debate destacando:

- a) Las opiniones que se fueron consolidando a lo largo del debate entre estudiantes respondieron principalmente a roles de liderazgos varios (mayor edad, personalidad extrovertida, etc.) y no tanto a argumentos desarrollados.
- b) El contexto de la pregunta del docente no fue enteramente dimensionado por los estudiantes (pregunta realizada a las dos semanas de iniciadas las clases). Interpretamos que la situación entonces comenzaba a convertirse en una del tipo evocada. La intermediación aquí no se estaba produciendo por la imposibilidad de acceso al contexto, sino por la no disponibilidad de herramientas conceptuales de parte de los estudiantes para analizarlo.

- c) Por tratarse del inicio de cursado, los estudiantes y docentes se encontraban en etapa de construcción del contrato didáctico (qué espera cada actor del otro). La falta de referencias en ese sentido entonces, generó incertidumbre en los estudiantes respecto a qué tipo de respuesta se imaginaban ellos que esperaban los docentes (Baruk, 1985).
- d) Los estudiantes en general portaban conocimientos del tipo teórico de matemática y de física. No contaban con experiencias de abordar problemas reales (escasas competencias en modelización).

Al observar (extraído de notas del docente) que los conceptos básicos de vectores (dirección, sentido y módulo) y leyes de Newton (equilibrio de fuerzas) no se encontraban disponibles (Robert, 1998, 2003) en los estudiantes, Docente 1 y Docente 2 propusieron una nueva situación: dos estudiantes tirando de un cinturón. Así dos estudiantes (A y B) fueron invitados a tirar en sentidos opuestos de un cinturón mientras Docente 1 modelizaba la relación de los esfuerzos (mayor, menor, o igual) en Geogebra controlando los módulos mediante deslizadores (A desplaza a B, A y B se equilibran, A es desplazado por B). Luego se agregó un tercer estudiante C donde B y C interactuaban con A. La situación fue representada por el Docente 1 en Geogebra (Figura 4).

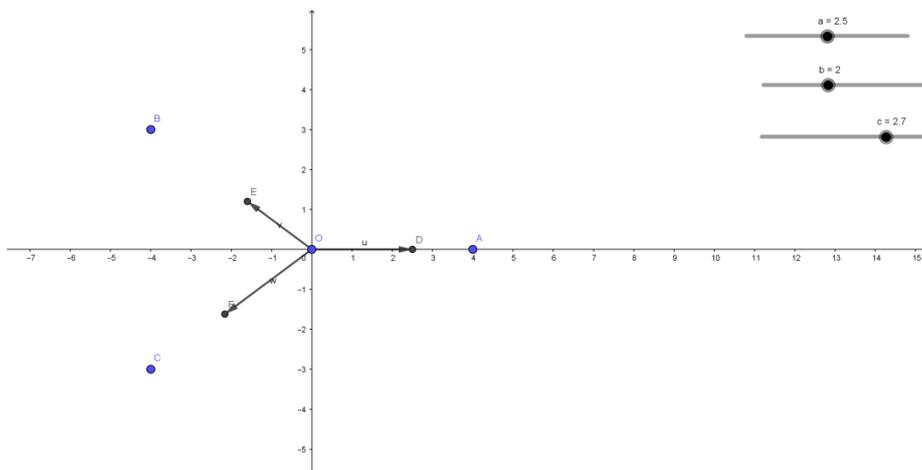


Figura 4. Representación vectorial de estudiantes interactuando con dos cinturones

Fuente: Elaboración propia

En base a notas de los docentes y a entrevistas posteriores interpretamos esta nueva actividad de los cinturones como una búsqueda de un contexto accesible para los estudiantes, donde ellos pudieran interactuar y así poder establecer relaciones entre el

contexto y su modelización (Czocher, 2019). Este contexto lo entendemos como uno del tipo “envoltorio” (Brown, 2019) por su función principal de hacer emerger conceptos que serían luego utilizados en el contexto original de interés, el de las riendas tensoras.

En una primera parte, la modelización de los estudiantes A, B y C tirando de los cinturones describe la relación (mayor, menor o igual) existente entre los esfuerzos participantes (dirección de modelización desde el contexto hacia el modelo). En una segunda etapa, el Docente 2 propuso: *“tengo una idea, y qué pasa si lo analizamos desde ahí, desde Geogebra, podríamos anticipar qué ocurre con los chicos, quién movería a quién? A ver, hagamos más grande “a” con el deslizador por ejemplo”*.

Los estudiantes infirieron progresivamente analizando el modelo, qué ocurriría en cada caso (dirección desde el modelo hacia el contexto: la modelización actúa como una predicción).

En notas de clase, el Docente1 comentaría luego sobre la actividad introducida: *“quería que aparezcan las nociones asociadas a vectores desde una situación más cercana a las experiencias de los chicos, porque las necesitábamos para analizar los esfuerzos de las riendas tensoras, también busqué que se vayan familiarizando con Geogebra”*.

Se produjo luego una institucionalización de nociones tales como descomposición de vectores, módulo, dirección, sentido y equilibrio de fuerzas. También se retuvieron elementos de Geogebra utilizados en la modelización.

En el encuentro siguiente, los docentes retomaron la pregunta sobre las riendas tensoras. En particular, la cuestión de la eventual variación de esfuerzos si la rienda resulta fijada más cerca o más lejos que los 6 metros previstos originalmente.

Esta vez, algunos estudiantes propusieron argumentos tomando en cuenta, por un lado, elementos del contexto de las riendas y por otro lado, elementos de la actividad anterior. Finalmente las opiniones de los estudiantes convergieron a una conclusión: *“los esfuerzos no van a cambiar”, “es lo mismo”, “no hay cambio de viento, el molino tampoco cambia, ni su peso”, “así que no cambian las fuerzas profe”*.

Si bien la conclusión era errónea, se observaron avances: los estudiantes comenzaban a considerar elementos del contexto, aunque claro está, de manera incompleta. Luego de algunos gestos de dudas y negación, uno de los docentes tomó la palabra:

Docente 1: “*vamos a analizar juntos esta cuestión, no nos podemos equivocar en esto, si el molino se cae puede haber daños irreparables, por decirlo sutilmente, y tenemos que ser bien conscientes de eso, sí?*”

Docente 1 comenzó entonces la construcción simplificada en Geogebra del molino y una de sus riendas tensoras; siendo el anclaje al piso de esta última, un punto dinámico controlado por un deslizador. La Figura 5 representa el inicio del proceso de modelización ($B=(\text{distancia},0)$).

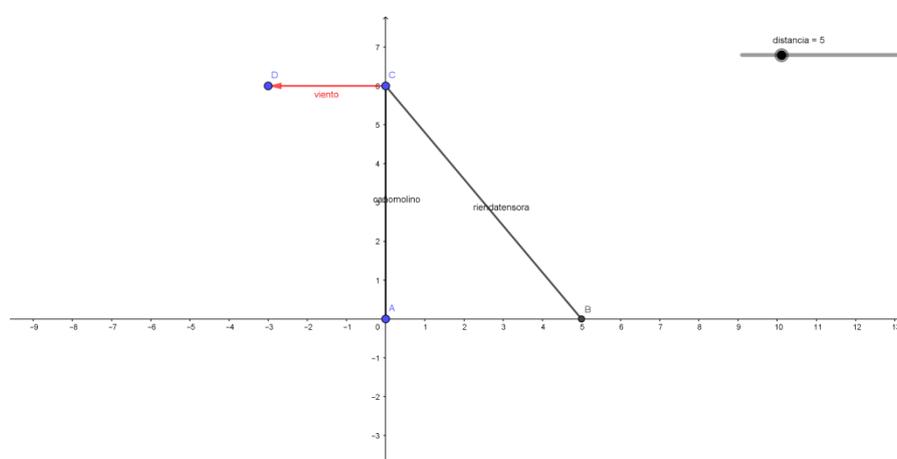


Figura 5. Inicio de representación de modelización

Fuente: Elaboración propia.

Luego el docente propuso representar la fuerza del viento en el extremo superior y preguntó si el molino se sostendría en su vertical actuando esa sola fuerza. Algunos estudiantes respondieron: “*así como está hasta ahí se cae*”, “*pero para eso está la rienda que le vamos a poner*”, “*es como el de los cintos*”, “*por más que la rienda la ponga más lejos profe, la rienda va a tenerlo igual, es como decíamos*”, “*la fuerza que tiene que hacer la rienda depende del viento y no de donde la pongamos profe*”.

Por razones de espacio no analizaremos aquí en detalle todo el proceso constructivo realizado en Geogebra. Nos centraremos en dos cuestiones, por un lado en que la modelización en Geogebra se constituyó en el espacio de debate entre docentes y estudiantes. La segunda es que el debate solo podía avanzar si se convocaban al comienzo conceptos de física. Los conceptos de física (leyes de Newton, equilibrio de

fuerzas) dieron los argumentos para asegurar la existencia de una fuerza actuando en la misma dirección, con el mismo módulo pero en sentido contrario a la del viento (Figura 6).

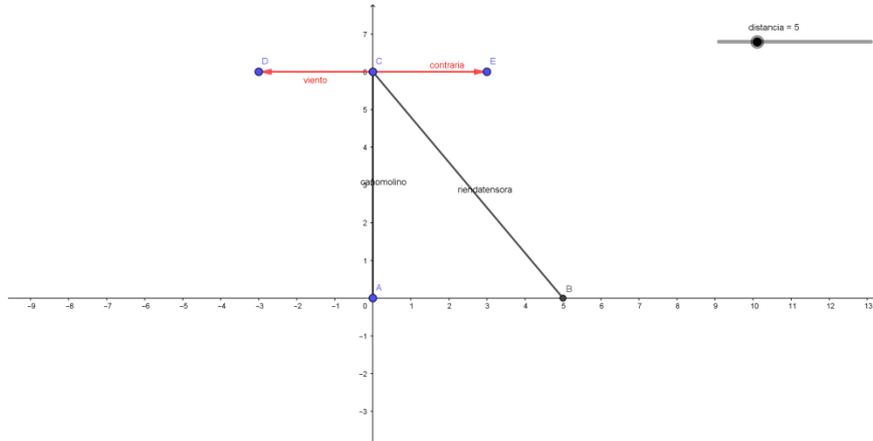


Figura 6. Equilibrio de fuerzas en extremo superior de molino

Fuente: Elaboración Propia

El análisis fue conducido principalmente por los docentes. A los fines de mantener la estructura relacional entre los vectores, se observó la convocación de conceptos de matemática tales como: simetría central, rotaciones, proyecciones, intersecciones varias, paralelismo y perpendicularidad, así como descomposición de vectores y punto medio (Figura 7).

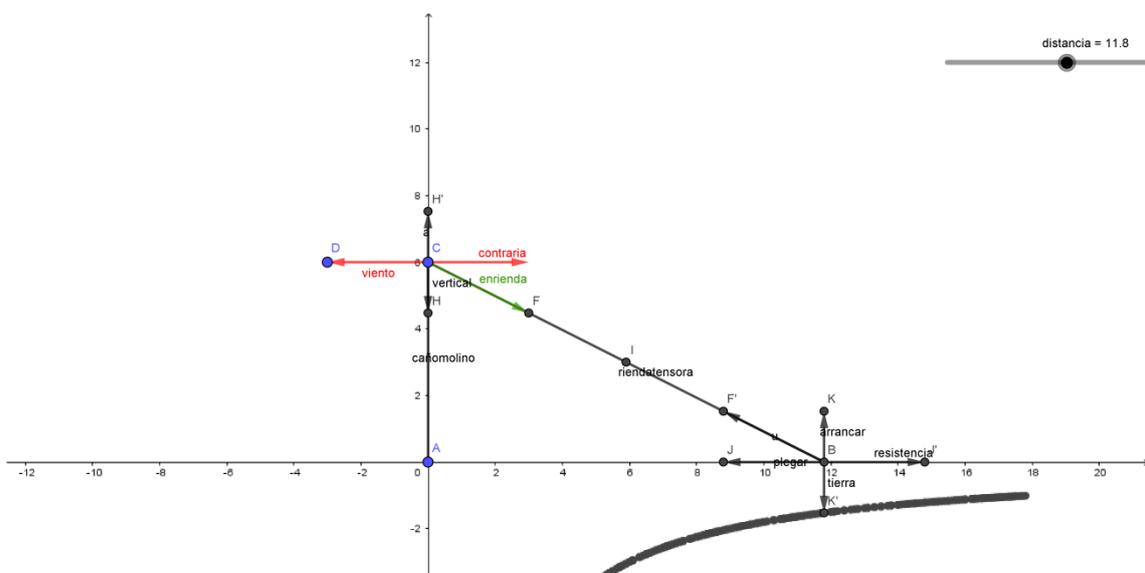


Figura 7. Representación de fuerza en rienda tensora

Fuente: Elaboración Propia

En la Figura 7 se visualizan básicamente dos objetos (caño del molino y rienda tensora) y un conjunto de vectores y sus descomposiciones (los elementos auxiliares se encuentran ocultos). También puede verse el rastro del extremo del vector llamado “tierra” que representa la variación del módulo de ese vector en función de la ubicación del anclaje de la rienda tensora (Punto B). Cabe acotar que la representación tiene, por un lado, objetos auxiliares matemáticos ocultos, por el otro lado, se mantuvieron visualizados vectores y sus descomposiciones, por lo que la ley de Newton pareciera no cumplirse, al menos en una primera lectura visual.

Por razones de espacio, y en función de los objetivos de este capítulo, retendremos:

- a) La construcción, según dichos de los docentes durante la clase y luego en sus notas, tuvo como objeto producir argumentos convincentes, por un lado para demostrar, y por otro lado para que se comprenda por qué los esfuerzos sobre la rienda tensora varían en función de la ubicación del anclaje al piso.
- b) Como consecuencia de lo anterior, los conceptos de matemática y de física convocados aparecieron como un conjunto de herramientas conceptuales para, no solamente comprender el fenómeno sino también decidir racionalmente sobre la conveniencia de alejar o acercar el anclaje al piso de la rienda tensora.
- c) La construcción en Geogebra, tal como fue realizada, requirió el paso obligado por dos campos disciplinares (física y matemática), ambos resultaron indispensables para el encadenamiento constructivo.
- d) Física participó con elementos modelizando una realidad, matemática aportando los instrumentos operacionales para relacionarlos con precisión en la construcción dinámica.
- e) La representación buscaba la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones de esfuerzos, pero también incrementó la de los profesores. En efecto, avanzado ya el análisis en clase, un estudiante preguntó: *“y qué pasa con esa fuerza que creo viene a ser la componente vertical del vector enrienda, no se puede hacer el mismo razonamiento? así, de seguirlo al razonamiento para abajo digamos”*. Docente 1 descubriendo algo no percibido por él hasta entonces responde: *“epa, dejame ver, no lo había pensado, resulta que si alejamos la rienda, se hace menos esfuerzo de compresión sobre el caño del molino y menos también sobre*

el pie del molino, increíble, que potente que es esto, es así (Docente2) o me equivoco?"

La segunda actividad retenida aquí vinculada al tema vectores y su abordaje interdisciplinar en el marco del proyecto resultó ser una continuación de la precedente. Según notas de docentes, con la primera en Geogebra se pretendió una comprensión de las relaciones entre esfuerzos y sus implicancias sobre el molino, con la segunda se buscó cuantificar el esfuerzo (modulo del vector) sobre el anclaje para así determinar la profundidad del pozo a realizar.

Docente 1: *"Les cuento algo que les va a gustar, ustedes no van a tener que hacer los pozos para las riendas, esos pozos los hacen los pobladores y van a estar listos para cuando vayamos a instalar el molino (festejos de los estudiantes), para eso yo le mando un plano a la familia para que vayan haciendo los pozos, pero les cuento también lo que nos pasó cuando instalamos hace un par de años un molino en lo de una pobladora llamada Yolanda, ya vieron vídeos del molino en lo de Yolanda, resulta que los pozos no los hicieron a la distancia que le habíamos pedido, y nos tuvimos que poner ahí en el lugar a calcular qué profundidad tenían que tener en función de esa distancia, y no teníamos todos los datos así que hicimos una estimación cómo pudimos, este año vamos a hacer mejor las cosas, vamos a hacer en hoja de cálculo un archivo donde tengamos las fórmulas y le carguemos solo la distancia a la que hicieron los pozos y que la hoja de cálculo nos devuelva la profundidad que tiene que tener el pozo, y ahí vemos si hay que cavar más profundo o no".*

Docente 2 describió a los estudiantes de qué manera se equilibra el vector llamado "arrancar", con otro que llamó "tierra" (Figura 7) y que resulta del peso de dos componentes, por un lado el bloque de hormigón, por el otro el de la tierra con la que se llena el pozo.

Estudiante M: *"profe el vector plegar mide lo mismo que viento no profe ?*

Docente 2: *"sí tal cual"*

Estudiante J: *"o sea que la tierra como que hace el esfuerzo horizontal que en definitiva contrarresta la del viento, yo no estoy en el grupo que tiene que hacer las riendas pero pregunto igual (risas)"*

Docente 2: *“son del mismo módulo sí, y la vertical arrancar aparece porque la rienda trabaja en ángulo, no horizontal, como dijo (Docente1), más cerca de la horizontal está la rienda, más chico es el esfuerzo, menos hondo tienen que hacer el pozo”*

Docente 2: *“volviendo al tema del pozo y la fuerza vertical que tiene que soportar, esa fuerza por decirlo de alguna manera, la hace la tierra que está por encima del bloque de hormigón, esa fuerza no la hace ni la que está al costado, ni la que está debajo, sino la que está por encima, el tema es ahora ponernos a calcular eso y dada la hora, les vamos a pedir que traigan propuestas para la clase que viene, vengan la clase que viene con una propuesta concreta sobre cómo hacer el cálculo ese”.*

Al encuentro siguiente, como en otros, los temas de trabajo se interceptaron, parte del tiempo se dedicó al bloque de hormigón, cómo se construye, para qué lleva una malla metálica, por qué el caño es galvanizado, cómo se fija el caño al bloque de hormigón, etc.

Nuevamente por razones de espacio no se desarrollan estos debates en este capítulo, sintetizaremos diciendo que el tema del cálculo de la profundidad del pozo fue retomado dos encuentros después y que duró dos encuentros, donde estudiantes y docentes avanzaron en dos direcciones: apropiación de las herramientas de Hoja de Cálculo y del problema, esta vez ya no en el registro geométrico como fue en Geogebra sino en el algebraico en la hoja de cálculo (Haspekian, 2005).

La dinámica observada podría describirse como una donde los estudiantes proponían procedimientos algebraicos y aritméticos en soporte papel y eventualmente en el soporte pizarrón cuando los compartían a la clase y los docentes acompañaban y guiaban la conversión de los procedimientos a Hoja de Cálculo.

La Figura 8 representa el archivo concluido y listo para ser utilizado en el campo a los fines de determinar la profundidad del pozo en función de la distancia del pozo al pie del molino.

	A	B	C	D
1	FViento	151		
2	altMolino	6		
3	distRienda	5		
4	angPisRien	0,87605805	50,1944289	
5	FRienda	235,86954		
6	FVertPozo	181,2		
7	densTierra	1800		
8	VolMuerto	0,05		
9	cuñaTierra	0,035		
10	VolRequer	0,10066667		
11	ProfPozo	0,67833333		
12				
13				

Figura 8. Cálculo de profundidad de pozos en Hoja de Cálculo

Fuente: Elaboración propia

La celda B1 (fuerza del viento) no era conocida al momento de la elaboración del archivo, por lo que quedó como un valor a determinar. B2 contiene la altura del molino (en metros). B3 es dedicada al valor de distancia a observar en el terreno.

B4 y C4 devuelven el valor del ángulo en Radianes y Grados que forma la rienda con el piso. B5 contiene el valor de la fuerza (en Newtons) que ejerce la rienda, el mismo sirve para determinar el tipo de cable a adquirir. B6 contiene el valor (en Newtons) de la fuerza vertical en el punto de anclaje B (ver estudio en Geogebra). B7 contiene el valor estimado de la densidad de la tierra del lugar. B8 representa el volumen (en metros cúbicos) del bloque de hormigón. B9 representa el volumen de tierra (en metros cúbicos) que queda por debajo del bloque de hormigón al momento de realizar el pozo. B10 representa el volumen de tierra requerido por encima del bloque de hormigón y B11 la profundidad a la que hay que cavar para llegar a ese volumen.

Los conceptos convocados para realizar la Hoja de Cálculo fueron, en física: unidades de fuerza, de volumen, de distancia, de densidad, y de peso. En matemática: determinación de volúmenes varios, trigonometría, función inversa y nociones de álgebra.

Se observó nuevamente aquí la interacción de dos disciplinas para el abordaje del concepto de vector, esta vez orientada a la determinación del módulo de un vector que debía responder a las características del problema de las riendas tensoras.

Cabe acotar que el archivo en hoja de cálculo fue guardado en los teléfonos de los estudiantes y que fue utilizado por ellos en la instalación del molino del puesto rural llamado “Las Margaritas” en cercanías de El Cuy (ver min 0:32, estudiantes profundizando los pozos hechos por los pobladores). Propondremos a continuación algunas reflexiones.

Discusión

El proyecto de los molinos fue ideado por el equipo de investigación a los fines de analizar las potencialidades y dificultades que presentan los proyectos interdisciplinarios como marco para el abordaje de conceptos disciplinares. Por trayectoria del equipo de investigadores, el foco de análisis estuvo orientado a observar conceptos de matemática interactuando con otras disciplinas.

Interpretamos que el proyecto de los molinos posee una relativa singularidad: él no responde a la dinámica generalizada donde a partir de un concepto disciplinar se diseña un proyecto para abordarlo. En este caso, se pretendió buscar un proyecto rico en conceptos que pudiera englobar el abordaje de un conjunto importante de saberes de interés a la cátedra. Esta perspectiva invirtió entonces la dinámica generalizada haciendo que los conceptos emerjan respondiendo a la lógica del proyecto.

En esta nueva dinámica, donde las demandas del proyecto marcaron la lógica de convocación de los saberes pudimos observar por un lado la indispensable interacción de disciplinas para abordar las cuestiones a resolver en el proyecto, por otro lado, las oportunidades que brinda el proyecto para desarrollar aspectos diferentes de un mismo concepto.

En el caso de vectores, la modelización en Geogebra buscó establecer principalmente las relaciones entre los vectores. En matemática en particular, los conceptos abordados referidos a vectores fueron desarrollados en los registros semióticos gráfico y algebraico. En la modelización en Hoja de Cálculo, y por su objetivo orientado a la cuantificación de módulos de vectores, los registros semióticos privilegiados fueron el numérico y el algebraico.

Rescatamos además que los requerimientos del proyecto convocaron de manera indispensable saberes de varias disciplinas. Aquí nos hemos centrado en cómo interactuaron física y matemática. Sin embargo, a lo largo del proyecto hubo otras convocadas de manera explícita como estadística por ejemplo. Destacamos que el proyecto admite integrar otras áreas que se constituyen incluso como cátedras de la TSMI, tales como Representaciones, Resistencia de los Materiales, Mantenimiento Industrial, Máquinas Hidráulicas, Economía, Ergonomía, etc.

En lo que respecta a las posibilidades para realizar modelizaciones, el proyecto brindó un número considerable de oportunidades. Aquí fue tratada solamente la problemática de la rienda tensora que por estrategia didáctica de los docentes, fue desdoblada en dos modelizaciones, una realizada en Geogebra, la otra en Hoja de Cálculo.

A lo largo del cuatrimestre se observaron otras, algunas también realizadas en Geogebra, como por ejemplo el estudio de área variable al viento del rotor. Ese estudio permitió, junto al realizado en estadística, estimar la potencia del molino en función de las diferentes velocidades de viento de la zona.

Las modelizaciones observadas a lo largo del proyecto fueron de diferente tipo, según la clasificación que se considere. Por ejemplo, las dos analizadas en este capítulo fueron del tipo descriptiva pero también prescriptiva (Ashim Bora & Ahmed, 2019; Stillman, 2019). Descriptiva por orientarse a caracterizar y describir fenómenos y prescriptiva porque ellas permitieron construir conclusiones para intervenir en el contexto. En este caso, la intervención consistió en la construcción e instalación de los molinos. En general, todas las observadas respondían a las dos modalidades puesto que el proyecto demandaba decisiones racionales y para ello resultaba necesario la comprensión de los fenómenos.

La única modelización considerada como del tipo “envoltorio” (Brown, 2019), donde el contexto resulta ser una excusa para abordar conceptos disciplinares fue la introductoria (estudiantes A, B y C tirando de los cintos) por haber sido considerada por los docentes como facilitadoras a la emergencia de conceptos que fueron utilizados en otras modelizaciones.

Las otras modelizaciones cumplieron el ciclo completo realidad-modelo-realidad, donde el contexto demandó acciones racionales a realizar, los argumentos se construyeron en el modelo mediante conceptos disciplinares y luego se regresó a la realidad para intervenir en ella. En este sentido, se observó también el funcionamiento de la dialéctica

herramienta-objeto: los conceptos debían ser comprendidos en su lógica interna para poder apropiarse de ellos y así constituirse en argumentos para actuar racionalmente.

Por otro lado, en el diseño del proyecto se consideraron tres dimensiones con la intención de facilitar la atribución de sentido, donde cada una se desarrolló de manera dual. Se buscó que los saberes:

- Resulten de utilidad para el futuro y también para el presente
- Sirvan para comprender el mundo pero también para intervenir en él.
- Sean trascendentes deviniendo de beneficio para los estudiantes y para la comunidad.

Estas tres dimensiones se manifiestan como pertinentes, aunque no son el objeto de análisis de este capítulo. Se ha observado en este y en otros proyectos llevados a cabo con estas características, que las componentes “utilidad para el presente”, “con la posibilidad de intervenir” y de “beneficio para la comunidad” son modalidades que facilitan la atribución de sentido por parte de los estudiantes y para los docentes también.

Estas modalidades nos parecen de gran interés, en particular para el período post pandemia Covid 19. Entendemos que los estudiantes deben constituirse en actores que contribuyan a la mejora de sus comunidades, en especial en tiempos como los actuales, donde se observa un crecimiento del deterioro del tejido socioeconómico de grandes sectores de la población.

El proyecto ha resultado una experiencia de reflexión y de aprendizaje para todos los actores respecto a la problemática de la igualdad de género. En el proyecto pudo constatar que todos podían desarrollar las tareas tanto analíticas como prácticas. Así y sin distinción de ningún tipo, los estudios en Geogebra y en Hoja de Cálculo fueron realizados por todos, del mismo modo que la construcción en hormigón de las bases, el soldado de partes y el uso de herramientas.

Por último, la diversidad de tareas que el proyecto demandó, permitió a muchos estudiantes explorar áreas de interés personal y proyectar así sus orientaciones profesionales.

Bibliografía

- Ashim, B., y Ahmed, S. (2019). Mathematical Modeling: An Important Tool for Mathematics Teaching. *International Journal of Research and Analytical Reviews*, 6(2), 252-256.
- Baruk, S. (1985). *L'Âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques: du Seuil*.
- Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp. 37-52).
- Brousseau, G. (1988). Le Contrat Didactique *Recherche en didactiques des mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brown, J. (2019). Real-World task context: Meanings and roles. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp. 53-81).
- Caron, F. (2019). Approaches to Investigating Complex Dynamical Systems. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp. 83-103).
- Crombie, A. C. (1980). *Styles of thinking and historiography of science*. Paper presented at the Sociedad Española de Historia de las Ciencias, Madrid. Espagne.
- Czocher, J. (2019). Precision, Priority, and Proxies in Mathematical Modelling. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp. 105-123).
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique* (1991 ed.). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- de Loiola Araújo, J. (2019). Toward a Framework for a Dialectical Relationship Between Pedagogical Practice and Research. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp. 21-36).

- de Vecchi, G., & Carmona-Magnaldi, N. (1996). *Faire construire des savoirs*. Paris, Francia. Hachette Education.
- Develay, M. (1994). Le sens dans les apprentissages: du désir au passage à l'acte. *Pédagogie collégiale*, 7(4), 23-26.
- Develay, M. (2004). *Donner du sens à l'école*. Issy-les-Moulineaux. Francia. ESF éditeur
- Hacking, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*. Paris, Francia. Seuil.
- Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques*. (Tesis doctoral), Universidad Paris 7 Denis Diderot, Paris, Francia.
- Jacques, F. (1987). De la Signifiante. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 92(2), 179-218.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en didactiques des mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A. (2003). Analyse de vidéo de séances de classe: des tâches prescrites aux activités des élèves, en passant par des pratiques des enseignants de mathématiques. IREM Paris.
- Savonius, S. (1922). *The wind rotor. In theory and practice*. Helsingfors, Finlandia. Savonius & Co.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.
- Skovsmose, O. (2005). *Traveling through education: uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam. Países Bajos Sens Publisher.
- Stillman, G. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education—Lines of Inquiry. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer, (pp.1-20).