Desigualdad de Buzano generalizada

Tamara Bottazzi

CONICET-CITECCA-UNRN (Sede Andina-Bariloche)

09-2022

Introducción

Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno sobre $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. La siguiente es la bien conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H} \tag{1}$$

La igualdad en (1) se alcanza si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) tal que $x = \alpha y$.
En 1974, María Luisa Buzano brindó la siguiente extensión de (1)

$$|\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle| \leq \frac{1}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|)\|z\|^2, \tag{2}$$

para cada $x, y, z \in \mathcal{H}$. Observar que si $z = y$ se tiene (1).

Preliminares

- $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert separable.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el espacio de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$, dotado con la norma usual

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \ \forall \ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

- I es el operador identidad en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- T es un operador positivo, $T \geq 0$, si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Denotamos con $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ el subconjunto de todos los operadores positivos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- El rango numérico de T es

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\},$$

con lo cual el radio numérico se define como

$$\omega(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\}.$$

Resumen de los resultados

Objetivo: Generalizar y refinar la desigualdad de Buzano

1. de $\alpha = 2$ a cualquier $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ con una demostración más sencilla que la original, inspirados por Fuji y Kubo en [FK1993], que usaron proyecciones ortogonales y (1).
2. Si $P = z \otimes z$ con $z \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle$$

   para todo $x, y \in \mathcal{H}$. La idea es generalizar a otros operadores P y ver cuáles podrían cumplir dicha desigualdad.

Importancia de la desigualdad: Aplicaciones para acotar y estimar el radio numérico de un operador/matriz.

En particular, cuando $T = x \otimes y$, tenemos que

$$|\langle Tz, z\rangle| = |\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle| \leq \frac{1}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|)\|z\|^2,$$

tomando supremo entre todos los $z \in \mathcal{H}$, $\|z\| = 1$, queda

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|).$$

La igualdad de Buzano se alcanza para un z determinado, según [FK1993], con lo cual se deduce que

$$\omega(T) = \frac{1}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|),$$

$\frac{1}{\alpha}$-Desigualdad de Buzano

Proposición

Sean $x, y, z \in \mathcal{H}$ con $\|z\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$|\alpha\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \max\{1, |\alpha - 1|\}\|x\|\|y\|. \tag{3}$$

Demo: Usar el operador $T = \alpha(z \otimes z)$ y $u \in \mathcal{H}$ con $\|u\| = 1$:

$$\|Tu - u\|^2 = (|\alpha - 1|^2 - 1)|\langle z, u\rangle|^2 + \|u\|^2 \leq \max\{1, |\alpha - 1|^2\}\|u\|^2.$$

Por lo tanto $\|T - I\| \leq \max\{1, |\alpha - 1|\}$ y

$$\begin{aligned} |\alpha\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle (T - I)x, y\rangle| \\ &\leq \|T - I\|\|x\|\|y\| \leq \max\{1, |\alpha - 1|\}\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$ lo obtenido es equivalente a

$$\left| \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1}{|\alpha|} \max\{1, |\alpha - 1|\} \|x\| \|y\|.$$

y por continuidad del módulo de los números complejos nos queda

$$|\langle x, z \rangle \langle z, y \rangle| \leq \frac{1}{|\alpha|} (|\langle x, y \rangle| + \max\{1, |\alpha - 1|\} \|x\| \|y\|),$$

para cada $x, y, z \in \mathcal{H}$ con $\|z\| = 1$.
Cuando $\alpha = 2$ Tenemos la Clásica desigualdad de Buzano (2).

- La idea principal en la demo anterior fue obtener una cota para la distancia entre T (de rango 1) e I.
- En [FK1993], la demo del caso $\alpha = 2$ usaron que $\|2P - I\| \leq 1$, siendo P una proyección ortogonal determinada.
- Ahora pensamos en llevar esta desigualdad a otros tipos de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que la cumplan.

Teorema (Buzano Generalizado)

Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, con $\|\alpha T - I\| \leq 1$. Entonces, para cada $x, y \in \mathcal{H}$

$$\left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|x\| \|y\|, \tag{4}$$

y

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle x, y \rangle \right| + \frac{1}{|\alpha|} |\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{|\alpha|} (|\langle x, y \rangle| + \|x\| \|y\|). \tag{5}$$

Demo: Sean $x, y \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, con $\|\alpha T - I\| \leq 1$. Por C-S tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle x, y \rangle \right| &= \left| \left\langle \left(T - \frac{1}{\alpha} I \right) x, y \right\rangle \right| \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha T - I\| \, \|x\| \|y\| \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle x, y \rangle \right| + \frac{1}{|\alpha|} |\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{|\alpha|} (|\langle x, y \rangle| + \|x\| \|y\|).$$

La condición $\|\alpha T - I\| \leq 1$

No todo operador T cumple que existe $\alpha \neq 0$ tal que $\|\alpha T - I\| \leq 1$: Consideremos el *shift* a izquierda, $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, $T(x_1, x_2, x_3, \cdots ,) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$ y $e_1 = (1, 0, 0, \cdots) \in l^2(\mathbb{N})$, con $\|e_1\| = 1$ y $\langle -Te_1, e_1\rangle = 0$. Entonces, por Teorema 2.1 en [BB2012], tenemos que para cada $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$\|I\|^2 + |\alpha|^2 m^2(-T) \leq \|I - \alpha T\|^2.$$

con $m(-T) = m(T) = \inf\{\|Tx\| : \ x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} > 0$ pues T es inversible a izquierda, con lo cual

$$1 < \|I\|^2 + |\alpha|^2 m^2(-T) \leq \|I - \alpha T\|^2.$$

(Todos los T tales que $I \perp_{BJ} T$ cumplen $1 \leq \|\alpha T - I\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$).

Por conveniencia, para $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ denotamos como

$$\mathcal{A}_\alpha = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|\alpha T - I\| \leq 1\},$$

el conjunto de todos los operadores que satisfacen el Teorema principal
A continuación, algunas propiedades básicas de $\mathcal{A}_\alpha$.

Proposición

Sea $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, entonces

1. $\mathcal{A}_\alpha$ *es un conjunto no vacío, cerrado y convexo de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Además, para cada $T \in \mathcal{A}_\alpha$,

2. $\|T\| \leq \frac{2}{|\alpha|}$.
3. $T^* \in \mathcal{A}_{\overline{\alpha}}$.
4. *Si $S \in \mathcal{A}_\alpha$, entonces $T + S \in \mathcal{A}_{\frac{\alpha}{2}}$.*
5. *Si $\|\alpha T - I\| < 1$, entonces T es inversible.*
6. *Si T es compacto y autoadjunto, entonces $T \geq 0$ o $-T \geq 0$.*

Algunos operadores que cumplen la condición $\|\alpha T - I\| \leq 1$

Proposición (Pos)

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{+} - \{0\}$, *entonces* $T \in \mathcal{A}_{\frac{2}{\|T\|}}$,

$$\left|\langle Tx, y\rangle - \frac{\|T\|}{2}\langle x, y\rangle\right| \leq \frac{\|T\|}{2}\|x\|\|y\|,$$

y

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y\rangle| &\leq \left|\langle Tx, y\rangle - \frac{\|T\|}{2}\langle x, y\rangle\right| + \frac{\|T\|}{2}|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \frac{\|T\|}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|), \end{aligned}$$

Demo: Es consecuencia directa del Teorema de Buzano generalizado y de que $T \in A_{\frac{2}{\|T\|}}$ [H2009].

Recordemos que T es una contracción positiva si $0 \leq T \leq I$.

Teorema

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción positiva. Entonces, $T \in \mathcal{A}_2$,

$$\left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{2} \langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \|x\| \|y\|$$

y además

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \left| \langle Tx, y \rangle - \frac{1}{2} \langle x, y \rangle \right| + \frac{1}{2} |\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{2} (|\langle x, y \rangle| + \|x\| \|y\|),$$

para cada $x, y \in \mathcal{H}$.

Demo: Como $2T - I$ es autoadjunto, entonces $\omega(2T - I) = \|2T - I\|$. Por otro lado, $W(2T - I) = \{2\langle Tx, x \rangle - 1 : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \subseteq [-1, 1]$. Luego, $T \in \mathcal{A}_2$ y se cumple el Teo. de Buzano generalizado.

Observación

Siguiendo la idea de la demo anterior se puede probar que si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$, *entonces* $T \in \mathcal{A}_\alpha$ *para cada* $0 < \alpha \leq \frac{2}{\|T\|}$.

Para $P = z \otimes z$, con $z \in \mathcal{H}$ y $\|z\| = 1$, usando las desigualdades anteriores

$$\begin{aligned} |\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle| &\leq \left|\langle x, z\rangle\langle z, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right| + \frac{1}{2}|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \frac{1}{2}(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|), \end{aligned}$$

para cada $x, y \in \mathcal{H}$. Esto es un refinamiento de la desigualdad de Buzano Clásica.

Si S es subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces $P = P_{\mathcal{S}}^2 = P_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}^*$ es la proyección ortogonal sobre S, y es contracción positiva con $\|P\| = 1$. Podemos generalizar la desigualdad (6) a una suma de dos proyecciones ortogonales.

Proposición

Sean $P_{\mathcal{T}}, P_{\mathcal{S}}$ proyecciones ortogonales sobre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}$, subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Entonces, para cada $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\left| \langle (P_{\mathcal{T}} + P_{\mathcal{S}})x, y \rangle - \frac{1 + \|P_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{S}}\|}{2} \langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1 + \|P_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{S}}\|}{2} \|x\| \|y\|,$$

y la (7) también se puede llevar a este contexto.

Demo: Observemos que $P_{\mathcal{T}} + P_{\mathcal{S}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$. También tenemos la igualdad de Duncan-Taylor [DT1975],

$$\|P_{\mathcal{T}} + P_{\mathcal{S}}\| = 1 + \|P_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{S}}\|.$$

Entonces, por Prop. (Pos) el resultado sigue.

Aplicación

Refinamientos de cotas para el radio numérico:

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con descomposición polar $T = V(T^*T)^{1/2}$. Entonces,

$$\omega(T) \leq \frac{\|T\|}{2}(1+\omega(V)) \leq \|T\| \tag{6}$$

y

$$\omega(T) - \frac{\|T\|}{2} \leq \frac{\|T\|}{2}\omega(V). \tag{7}$$

Demo: Observemos que $|\langle Tx, y\rangle| = |\langle (T^*T)^{1/2}x, V^*y\rangle|$ y usando la Prop.(Pos) llegamos a que

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \frac{\|T\|}{2}(|\langle x, V^*y\rangle| + \|x\|\|V^*y\|).$$

Tomando $y = x$ y el supremo sobre todos los $x \in \mathcal{H}$ con $\|x\| = 1$ deducimos que $\omega(T) \leq \frac{\|T\|}{2}(1+\omega(V))$.

Cuestiones pendientes

- Profundizar el estudio de $\mathcal{A}_\alpha$ en vías de una caracterización.
- Usar estas desigualdades en la obtención de nuevas cotas para $\omega(T)$, siendo T la matriz compañera de un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ [FK1993].

Agradecimientos

- UNRN: mi presentación fue financiada por el PI UNRN 2020 40-B-906 y el PICT 2017-0019
- CONICET.
- ANPCyT.
- **Especialmente a todos los presentes!!! :)**

Referencias (lista abreviada)

BB2012 M. Barraa y M. Boumazgour, *A note on the orthogonality of bounded linear operators*. Funct. Anal. Approx. Comput. **4** (2012), no. 1, 65–70.

Bu1974 M. L. Buzano, *Generalizzazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz* (Italian), Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino **31** (1974), 405-409.

Dra2016 S.S. Dragomir, *Buzano's inequality holds for any projection* Bull. Aust. Math. Soc. 93 (2016), no. 3, 504–510.

DT1975 J. Duncan y P. J. Taylor, *Norm inequalities for C^*-algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 75 (1975/76), no. 2, 119–129.

FK1993 M. Fujii y F. Kubo, *Buzano's inequality y bounds for roots of algebraic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 2, 359–361.

H2009 O. Hirzallah, *Commutator inequalities for Hilbert space operators*, Linear Algebra Appl., 431 (2009), 9, 1571–1578.