

# Estabilidad y bifurcaciones de sistemas con retardos con semidiscretización y un método en frecuencia

Griselda R. Itovich

*Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente  
Sede Alto Valle y Valle Medio, Univ. Nacional de Río Negro  
R8336ATG Villa Regina, Argentina  
gitovich@unrn.edu.ar*

Franco S. Gentile

*Depto. de Matemática, Univ. Nacional del Sur  
IIIE "Alfredo Desages," CONICET  
B8000CPB Bahía Blanca  
fsgentile@gmail.com*

Jorge L. Moiola

*Dpto. de Ing. Eléctrica y de Computadoras, Univ. Nacional del Sur  
IIIE "Alfredo Desages," CONICET  
B8000CPB Bahía Blanca  
jmoiola@uns.edu.ar*

**Abstract**—En este trabajo, se combinan dos metodologías para el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio así como de soluciones periódicas en sistemas que poseen controladores afectados por retardos temporales. Las herramientas empleadas son el método en frecuencia, que utiliza el criterio generalizado de Nyquist y el balance de armónicos, y el método de semidiscretización, que permite obtener una expresión aproximada del operador de monodromía. Los resultados se ilustran con dos ejemplos de interés, y se contrastan con el software específico Dde-Biftool.

**Index Terms**—Semidiscretización, sistemas con retardos, bifurcaciones, ciclos límites.

## I. INTRODUCCIÓN

En general, la presencia de retardos temporales tiene efectos nocivos en la estabilidad de los sistemas de control realimentado, dado que pueden causar inestabilidad, oscilaciones simples o múltiples, y dinámica compleja. Estos comportamientos buscan evitarse en la mayoría de los diseños que involucran procesos, y por lo tanto se intenta emplear controladores suficientemente rápidos. Sin embargo, en los casos en los cuales los retardos no pueden evitarse y/o despreciarse en los modelos matemáticos, su tratamiento analítico es desafiante. En lo que concierne a estabilidad de puntos de equilibrio, el número de autovalores del sistema linealizado es infinito y por lo tanto el sistema es muy propenso a inestabilizarse al variar parámetros relevantes. Otra dificultad radica en detectar la aparición de fenómenos oscilatorios, y las herramientas a tal efecto pueden rastrearse hasta un trabajo pionero que utiliza la información del criterio de estabilidad de Nyquist [1].

Existe una metodología más reciente que permite analizar el nacimiento de una oscilación suave al variar un parámetro distintivo de un sistema en un modelo representado por diagramas bloques y utilizando la teoría de control realimentado [2]. Este mecanismo de generación de oscilaciones se conoce como el teorema gráfico de bifurcación de Hopf y dió un marco teórico indispensable para progresar en el análisis de la dinámica oscilatoria permitiendo su extensión a algunos sistemas con retardos temporales [3], [4].

En contraste con las problemáticas asociadas a la presencia de retardos en lazos de control, se diseñaron retroalimentaciones retrasadas intencionalmente, para estabilizar dinámica caótica [5], [6]. Estas técnicas tienen la enorme ventaja de una sencilla implementación experimental que no requiere disponer de modelos muy precisos. Además, la sintonía en la variación del retardo temporal provoca inmediatamente la estabilización de una dinámica errática en una oscilación bien definida. Un ejemplo claro es el oscilador de Rössler cuya dinámica caótica puede evitarse con una sencilla realimentación de variables retrasadas [7]. Por otro lado, se ha descubierto que ciertos sistemas pueden estabilizarse adecuadamente con varias señales con tiempos de retardo distintos [8].

En resumen, los retardos temporales pueden colaborar para inestabilizar el sistema o, por el contrario, para proveer una adecuada estabilización, y además pueden utilizarse para modificar la estabilidad no sólo de puntos de equilibrio (como es habitual en sistemas ingenieriles) sino también de órbitas periódicas, cuando se busca que el sistema exhiba un comportamiento oscilatorio con amplitud y frecuencia definidas. En el segundo caso, la determinación de dicha estabilidad es compleja, y se necesita contar con una expresión aproximada del operador de monodromía, que a su vez requiere la expresión de la propia órbita periódica. En ese sentido, una técnica conocida bastante explorada que emplea aproximaciones de las órbitas con polinomios de Tchebyshev puede verse en [9]. Es por ello que la idea central de este trabajo es combinar dos metodologías para lograr estos cálculos. Una de ellas es el ya mencionado método en frecuencia, que permite obtener expresiones aproximadas de los ciclos límites, cuya exactitud dependerá de la cantidad de armónicos empleados en la expresión [3], [4]. La segunda técnica se denomina semidiscretización, y como su nombre lo sugiere, consiste en discretizar el tiempo, pero sólo para ciertas variables o términos de la ecuación [10]. Se mostrará que la combinación de ambas, es muy efectiva para la determinación de la estabilidad de órbitas periódicas. Se utilizarán dos ejemplos con la

característica retroalimentación propuesta por Pyragas [5] con el fin de ilustrar los resultados obtenidos.

## II. ESTABILIDAD DE SISTEMAS CON RETARDOS

Se considera la ecuación diferencial con retardo

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau); \mu), \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  es el retardo y  $\mu$  es un vector de parámetros, mientras se supone  $f$  es una función no lineal suave. Interesa conocer cómo cambian las soluciones de (1) a medida que el retardo  $\tau$  y el vector  $\mu$  varían. La estabilidad de la solución de equilibrio  $x^*$  se puede establecer por medio de la ecuación diferencial lineal

$$\dot{y} = D_0 y(t) + D_1 y(t - \tau), \quad (2)$$

donde

$$D_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}, \quad D_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x(t - \tau)} \right|_{x=x^*}. \quad (3)$$

Para que la solución  $x^*$  sea asintóticamente estable, la ecuación característica

$$|\lambda I_n - (D_0 + D_1 e^{-\lambda \tau})| = 0, \quad (4)$$

debe tener todas sus raíces  $\lambda$  con parte real negativa. Se producirá un cambio de estabilidad en  $x^*$  si alguna raíz de (4) cruza al semiplano derecho (mientras las restantes permanecen en el semiplano izquierdo), ante la variación de  $\tau$  o alguno de otros parámetros. Si un par de raíces de (4) cruza el eje imaginario pueden aparecer soluciones periódicas mediante una bifurcación de Hopf. Por otra parte, la estabilidad de una solución periódica  $\tilde{x}(t)$  de período  $T$ , también se deduce de (2) donde  $D_0$  y  $D_1$  en (3) se evalúan en  $x = \tilde{x}(t)$ . Básicamente, se debería establecer cómo evoluciona una condición inicial arbitraria  $x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]$  por medio de (2), en el intervalo  $[T - \tau, T]$ , es decir en el lapso de un período  $T$ .

## III. LA METODOLOGÍA EN EL DOMINIO FRECUENCIA

La ecuación (1) puede ser abordada en el dominio frecuencia, expresándola en forma de sistema realimentado como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu, \\ y &= y(t) = -Cx(t), \\ u &= g(y(t), y(t - \tau); \mu) = g(Y; \mu), \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $A_0, A_1$  son matrices de orden  $n \times n$ ,  $B$  es de orden  $n \times p$  y  $C$  es  $m \times n$  (estas matrices pueden depender del parámetro  $\mu$ ). En esta presentación, consideraremos por simplicidad los sistemas de la forma (1) que pueden representarse en la forma (5) tomando  $p = m = 1$ , que corresponde al caso SISO (*single input - single output*). La entrada  $u$  concentra la parte no lineal del sistema, la salida (considerando las componentes sin y con retardo) es  $Y = [y(t) \quad y(t - \tau)]$ , mientras que la parte lineal  $G(s)$ , mediante la aplicación de la transformada de Laplace, está dada por

$$G = G(s) = C [sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau}]^{-1} B,$$

donde por simplicidad se ha omitido la dependencia de  $G$  en los parámetros  $\mu$  y  $\tau$ . Para más detalles sobre esta formulación, véase [4].

A los efectos de facilitar la descripción de la metodología en el dominio frecuencia, se supone que  $u = g(y(t); \mu)$  ( $Y$  se vuelve unidimensional), que puede adaptarse con ligeros cambios al caso  $u = g(y(t - \tau); \mu)$ . Los equilibrios  $y^*$  son las soluciones de la ecuación  $G(0)g(y^*; \mu) = -y^*$ . La situación considerada cobra importancia por cuanto se puede aplicar en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias donde se incluye una realimentación de tipo Pyragas [5], con el objeto de modificar características dinámicas de las soluciones.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio  $y^*$ , se puede aplicar el criterio generalizado de Nyquist. Sea  $J = \partial g / \partial y|_{y=y^*}$ . Las condiciones para un cambio de estabilidad en  $y^*$  se obtienen suponiendo que la ganancia del lazo linealizado  $G(s)J$  toma el valor  $-1$  para  $s = i\omega_0, \omega_0 \neq 0$ , cuando  $\tau = \tau_0, \mu = \mu_0$ . Consideremos el lugar geométrico del autovalor característico de  $\hat{\lambda} = G(i\omega)J$  y el lugar geométrico de la amplitud:  $L_1 = -1 + \xi_1 \theta^2$ , donde  $\theta$  es un parámetro auxiliar que representa una medida de la amplitud de la órbita periódica que se pretende detectar y

$$\xi_1(i\omega) = -G(i\omega) \left\{ D_2 (V_{02} + \frac{1}{2} V_{22}) + \frac{1}{8} D_3 \right\}, \quad (6)$$

siendo  $D_2 = \left. \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right|_{y=y^*}, D_3 = \left. \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right|_{y=y^*}$  y

$$V_{02} = -\frac{1}{4} H(0) D_2, \quad V_{22} = -\frac{1}{4} H(2i\omega) D_2, \quad (7)$$

donde  $H(s) = (1 + G(s)J)^{-1} G(s)$ . Cabe aclarar que las expresiones (6) y (7) corresponden al sistema SISO. Las ecuaciones para el caso general, donde la matriz  $G(s)J$  no es escalar, pueden verse en [3]. El teorema gráfico de bifurcación de Hopf establece las condiciones para que, frente a un cambio de estabilidad en un punto de equilibrio (ocasionado por la perturbación de un cierto parámetro), aparezca una rama de soluciones periódicas. La formulación básica permite hallar una expresión aproximada de la solución periódica con armónicos hasta segundo orden. Para construir estas fórmulas es necesario conocer estimaciones de la amplitud  $\theta_1$  y de la frecuencia  $\omega_1$  de las mismas que se pueden encontrar a través de la intersección entre el lugar geométrico de la amplitud  $L_1$  y el lugar geométrico de  $\hat{\lambda}$ . La expresión de la órbita resulta:

$$y = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^2 Y^k \exp(ik\omega_1 t) \right\},$$

donde  $Y^0 = V_{02} \theta_1^2, Y^1 = \theta_1, Y^2 = V_{22} \theta_1^2$ .

Sin embargo, también se pueden obtener expresiones de las órbitas que incluyen un número mayor de armónicos [3] mejorando de este modo la precisión de las mismas, cuando se las compara con las que se obtienen, por ejemplo, con el paquete Dde-Biftool [11]. Este teorema tiene sólo carácter local, esto es, los resultados que se obtienen son aplicables sólo en un entorno del valor crítico del parámetro donde ocurre la bifurcación, y además las aproximaciones de las órbitas pierden precisión a medida que se alejan del nacimiento de la

rama de soluciones periódicas. Por otra parte, esta versión del teorema provee una expresión para el coeficiente de curvatura  $\sigma$  del ciclo emergente

$$\sigma = \operatorname{Re} \left( \frac{\xi_1(i\omega)}{G'(i\omega)J} \right), \quad (8)$$

con  $\xi_1$  dado por (6), que permite establecer cómo es su estabilidad de acuerdo al signo de este coeficiente: el ciclo es estable si  $\sigma$  es negativo e inestable si  $\sigma$  es positivo.

#### IV. ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES DE CICLOS

Una vez establecida la aparición de una solución periódica  $\gamma = \gamma(t)$  de (1), producto de una bifurcación de Hopf, se puede analizar su estabilidad empleando la expresión del coeficiente de curvatura (8). A medida que el valor del parámetro se aleja del valor crítico de bifurcación, la estabilidad de  $\gamma(t)$ , de período  $T$  aún puede conocerse a partir de la ecuación (2) evaluando para  $x = \gamma(t)$ , la cual resulta una ecuación lineal con retardo con coeficientes  $T$ -periódicos. Para resolver esta ecuación con condición inicial  $y(t) = \varphi(t)$ ,  $t \in [-\tau, 0]$  y analizar la estabilidad de  $\gamma(t)$ , hay que construir el operador de monodromía  $U$ , que en este caso resulta operador es compacto por lo que se sabe que el espectro  $\sigma(U)$  tiene como punto de acumulación al 0 y además  $1 \in \sigma(U)$ . Los elementos que forman el espectro de  $U$  son los multiplicadores de Floquet del ciclo en cuestión y al 1 se referirá como el multiplicador trivial  $\mu_0$  [12]. En particular, se construirá una matriz de monodromía  $U$  cuyas características de estabilidad sean similares a las del operador  $U$ , esto significa que sus autovalores concuerdan con multiplicadores de Floquet del ciclo que son relevantes. Una órbita será inestable cuando un autovalor está ubicado por fuera del círculo unitario. Ahora bien, si el ciclo es estable y un autovalor cruza el círculo unitario pasando por 1 o por  $-1$ , hay una bifurcación de ciclos de silla nodo o de doble período, respectivamente. Si, alternativamente, un par de autovalores complejos conjugados cruza la frontera del círculo unitario se tiene una bifurcación toroidal o Neimark-Sacker, que da lugar a la aparición de soluciones cuasiperiódicas. Para la detección de dichas bifurcaciones de ciclos, se obtendrá la matriz de monodromía utilizando un método de semidiscretización, que se describe a continuación.

#### V. MÉTODO DE SEMIDISCRETIZACIÓN

El objetivo de esta sección es introducir una metodología para analizar la estabilidad de puntos de equilibrio y de soluciones periódicas, en particular, en ecuaciones diferenciales con uno o varios retardos [10]. En forma simplificada para su presentación, se considera la expresión de un sistema diferencial lineal de primer orden con un retardo y con coeficientes periódicos, esto es:

$$\dot{y} = A(t, \mu)y + B(t, \mu)y(t - \tau), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices de orden  $n$  continuas con coeficientes  $T$ -periódicos en la variable  $t$ ,  $\mu$  es un vector de parámetros, y  $\tau$  es el retardo temporal,  $0 \leq \tau \leq T$ . Interesa determinar la estabilidad del equilibrio trivial de (9) y sus

posibles bifurcaciones. Este análisis cubre diferentes aspectos, entre ellos, el caso en que  $A$  y  $B$  sean matrices constantes (no dependientes de  $t$ , como en (2)) que permite estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio en ecuaciones diferenciales con retardos temporales (EDRTs) no lineales, y como correlato obtener las llamadas cartas (o mapas) de estabilidad. Éstas son representaciones bidimensionales en el espacio de parámetros extendido  $\tau - \mu$  donde se distinguen regiones teniendo en cuenta los cambios de estabilidad de un punto de equilibrio.

Por otra parte, mediante (9) y en el caso en que las matrices  $A$  y  $B$  se asuman  $T$ -periódicas, se podrá estudiar la estabilidad de una órbita que resulte, por ejemplo, de una bifurcación de Hopf en EDRTs, empleando una fórmula aproximada de la misma obtenida mediante el método descrito en la Sección III. También, es posible detectar bifurcaciones de ciclos, mediante la variación de ciertos parámetros del modelo y construir las curvas de bifurcaciones secundarias.

Para facilitar la exposición, se considera el problema unidimensional ( $y(t)$  es escalar) y se omitirá el vector de parámetros  $\mu$  (se considera éste con un valor fijo). Para un tratamiento más general, ver [10]. Para comenzar, se toma una partición  $\sigma$  en el intervalo  $[0, T] = \cup_{i=0}^{p-1} [t_i, t_{i+1}]$ , de donde resulta  $h = \frac{T}{p}$  que es el ancho de cualquier subintervalo  $I_i$  de  $\sigma$ . Con este objetivo, en  $I_i$  se aproximan los coeficientes  $A(t)$  y  $B(t)$  usando un valor promedio mediante integrales, y la variable de estado con retardo, mediante una expresión dependiente de  $t$ , que resulta de una interpolación lineal. Así resulta el esquema denominado de primer orden. En principio, si  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , resulta

$$\dot{y}(t) = A_i y(t) + B_i (\beta_{i,0} y(t_{i-r}) + \beta_{i,1} y(t_{i+1-r})), \quad (10)$$

donde  $A_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) ds$ ,  $B_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) ds$  y el valor  $r$  queda determinado como el número natural definido como  $r = \lfloor \frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \rfloor$  (o bien 0) donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la parte entera de un número real.

De este modo (ver (9)), se aproxima el término

$$y(t - \tau) \approx y(t_i + \frac{h}{2} - \tau) = \beta_{i,0} y_{i-r} + \beta_{i,1} y_{i+1-r},$$

donde

$$\beta_{i,0}(t) = \frac{(i-r+1)h - (t-\tau)}{h}, \quad \beta_{i,1}(t) = \frac{(t-\tau) + (r-i)h}{h},$$

considerando que si  $t \in I_i$ , entonces  $(t - \tau) \in [t_{i-r}, t_{i-r+1}]$  y se utiliza una interpolación lineal entre los valores  $y_{i-r}$  e  $y_{i+1-r}$  para aproximar  $y(t - \tau)$ . El sistema discretizado puede resolverse analíticamente en  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  con los valores iniciales  $y_i$  e  $y_{i-r}, y_{i+1-r}$  de la forma

$$y_{i+1} = P_i y_i + R_{i,0} y_{i-r} + R_{i,1} y_{i+1-r}, \quad (11)$$

donde  $P_i = e^{A_i h}$ , es la exponencial de  $A_i h$ , y suponiendo, por ejemplo que  $A_i$  es siempre no nula, resultan las siguientes expresiones

$$R_{i,0} = \left[ \frac{1}{h} (J_n(A_i^{-1}(-\tau + rh - h) + A_i^{-2}) + A_i^{-1}) \right] B_i, \quad (12)$$

$$R_{i,1} = \left[ \frac{1}{h} (J_n(A_i^{-1}(\tau - rh) - A_i^{-2}) - A_i^{-1}) \right] B_i, \quad (13)$$

donde  $J_n = I_n - e^{A_i h}$  (en el caso unidimensional  $I_n = 1$ ). Si  $A_i$  es nula en algún caso,  $R_{i,0}$  y  $R_{i,1}$  se calculan mediante integración numérica. Entonces (11) se puede escribir como

$$z_{i+1} = G_i z_i, \quad (14)$$

donde  $z_i = (y_i \ y_{i-1} \ y_{i-2} \ \cdots \ y_{i+1-r} \ y_{i-r})$  es un vector de estado aumentado y la matriz de coeficientes  $G_i$  resulta una matriz de bloques particular como

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & \cdots & \cdots & R_{i,1} & R_{i,0} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que  $T = ph$ , mediante  $p$  aplicaciones de (14) con estado inicial  $z_0$  se consigue una aplicación de monodromía  $z_p = \Phi z_0$ , donde

$$\Phi = G_{p-1} G_{p-2} \cdots G_0, \quad (15)$$

es una matriz de orden  $(1+r)$  que representa el operador de monodromía de (10) que es al mismo tiempo una aproximación finita del operador de monodromía (infinito dimensional) del sistema (9). Si todos los autovalores de  $\Phi$  están dentro del círculo unidad en el plano complejo, entonces el sistema (10) es asintóticamente estable. En [13] está demostrado que bajo condiciones apropiadas, ciertas técnicas de discretización como la descrita, preservan la estabilidad asintótica en EDRTs del tipo retardadas. Luego, las cartas de estabilidad de (10) dan una aproximación de las cartas de estabilidad del sistema lineal periódico con retardo (9).

Para sintetizar, se analizará la estabilidad de puntos de equilibrio en EDRTs y se construirán las cartas de estabilidad, teniendo en cuenta que las matrices intervinientes en (9) pueden ser constantes. Por otra parte, estos sistemas generales pueden ser el resultado de la linealización de una EDRT no lineal en torno a una solución periódica emergente. Analizar su comportamiento asintótico va a permitir determinar la estabilidad del ciclo. Si esta solución periódica resulta de una bifurcación de Hopf y el sistema fue abordado con la metodología en frecuencia, se podrá construir una fórmula aproximada para la misma y con esto podrá escribirse un sistema como (9) con coeficientes periódicos. Su estabilidad se estudiará con el método de semidiscretización, que fue descrito a lo largo de esta sección. A su vez y en este último caso, siguiendo la evolución de los autovalores del operador de monodromía (o multiplicadores de Floquet del ciclo) se podrán establecer bifurcaciones de ciclos y construir también las curvas asociadas en el espacio de parámetros.

## VI. EJEMPLOS

### A. El sistema de Tesi controlado por retardo

El sistema para analizar parte del modelo presentado en [14] con una variante dada por una realimentación del tipo de Pyragas [5], que se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 1.2x_2 + \mu x_3 + x_1^2 + k\Delta_\tau(x_1), \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\mu \in R$ , y  $\Delta_\tau(x_1) = x_1(t) - x_1(t-\tau)$ ,  $k, \tau > 0$ . Los puntos de equilibrio son:  $x_0^* = (0, 0, 0)$  y  $x_1^* = (1, 0, 0)$ . Para estudiar la estabilidad del sistema en los puntos de equilibrio, basta con analizar la ecuación linealizada (2) con

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1+k+2x_{0,1}^*(1) & -1.2 & \mu \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dadas en (3), donde  $x_{0,1}^*(1)$  representa la primera componente de  $x_0^*$  o  $x_1^*$ , según sea el equilibrio en consideración.

Se elige  $x_0^*$  y se discretiza el sistema para  $\mu = 1, k = 0.5, \tau = 1 = T$ , y  $p = 10$  entonces  $h = \frac{T}{p} = \frac{1}{10}$  y  $r = \lceil \frac{\tau}{h} + 0.5 \rceil = 10$ . De esta forma, la representación de la aplicación de monodromía para el sistema discretizado, que surge de tomar una partición del intervalo  $[0, T] = \cup_{i=1}^{10} [t_{i-1}, t_i]$  es una matriz cuadrada  $G_i$  de orden  $13 = 3 + 10$ , donde  $n = 3$  es la dimensión de la variable  $x$ ,  $r = 10$  y se puede describir por bloques como  $G_i(1:3, 1:3) = \expm(D_0(x_0^*))$ , donde  $\expm$  representa la exponencial de una matriz,  $G_i(4, 1:3) = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $G_i(5:13, 4:12) = I_9$ ,  $I_9$  es la matriz identidad de orden 9,  $G_i(1:3, 12) = R_{i,1}$ ,  $G_i(1:3, 13) = R_{i,0}$  donde la matriz  $J_n$  que aparece en  $R_{i,0}$  (12) y en  $R_{i,1}$  (13) involucra a la matriz identidad de orden 3. De esta manera, por medio de la aplicación reiterada de  $G_i$  se puede obtener  $\Phi$  de (15) y así determinar las cartas de estabilidad del sistema (16) en el equilibrio  $x_0^*$ . Fijando uno de los parámetros, por ejemplo para  $k = 0.5$ , se obtienen las regiones de estabilidad que aparece en la Fig. 1.

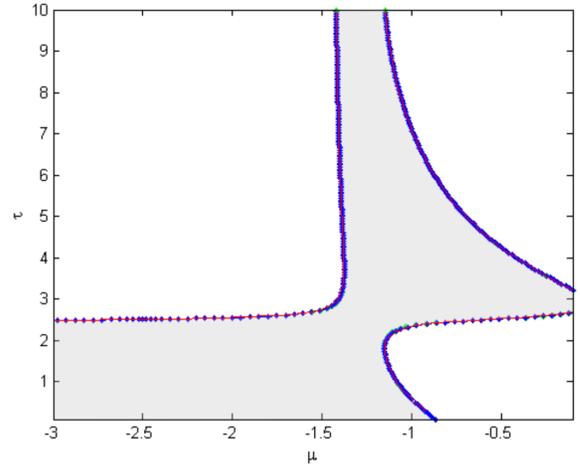


Fig. 1. Carta de estabilidad del equilibrio trivial para el sistema (16) con  $k = 0.5$  en el plano  $(\mu, \tau)$ . La región sombreada corresponde a donde el equilibrio  $x_0^*$  es asintóticamente estable. Los resultados obtenidos con semidiscretización (línea roja) y Dde-Biftool (puntos azules) son indistinguibles.

Por otra parte, para aplicar la metodología en frecuencia se definen las matrices

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1.2 & \mu \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= [0 \ 0 \ 1]^T, \quad C = [1 \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

y el sistema (16) se puede expresar de acuerdo a (5) como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0x + A_1x(t - \tau) + Bu, \\ y &= -Cx, \\ u &= g(y) = -ky + y^2,\end{aligned}$$

incluyendo nuevas variables de entrada  $u$  y salida  $y = -x_1$ . La matriz  $G$  que representa la parte lineal del sistema es

$$G(s) = C[sI_3 - A_0 - A_1e^{-s\tau}]^{-1}B = \frac{1}{\Delta(s)},$$

siendo  $\Delta(s) = s^3 - \mu s^2 + 1.2s + ke^{-s\tau} + 1$ . Los equilibrios en el dominio frecuencia se obtienen al resolver la ecuación  $G(0)g(y) = -y$ , de donde resultan las soluciones  $y_1^* = 0$  e  $y_1^* = -1$ . Para estudiar la estabilidad del equilibrio trivial, analizamos el polinomio característico de la matriz  $G(s)J$ , donde  $J = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=y^*=0} = [-k + 2y]_{y=y^*=0}$ . Dado que esta matriz es escalar, para ver si ocurre alguna bifurcación de Hopf se plantea

$$G(s)J = -1 \iff s^3 - \mu s^2 + 1.2s + ke^{-s\tau} + 1 - k = 0.$$

Para determinar las expresiones de las órbitas que nacen de la bifurcación de Hopf, es necesario conocer estimaciones de la amplitud y de la frecuencia de las mismas. Esto se logra hallando la intersección entre el lugar geométrico de la amplitud  $L_1 = -1 + \xi_1 \theta^2$  y el lugar geométrico de

$$\hat{\lambda}(s) = G(s)J = \frac{-k}{\Delta(s)}.$$

Un valor de frecuencia aproximado para comenzar a reconstruir la órbita es el que surge de resolver  $\text{Im}\hat{\lambda} = 0$ . Si se considera la ecuación  $\hat{\lambda}(i\omega) = -1$ , separando en parte real e imaginaria, se obtienen las siguientes ecuaciones para la condición de la bifurcación de Hopf

$$\begin{cases} \omega^2\mu + k \cos \omega\tau + 1 - k = 0, \\ -\omega^3 + 1.2\omega - k \sin \omega\tau = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Un punto de Hopf que satisface (17) resulta si  $k = 0.5$  y  $\tau = 1$  para  $\mu_0 = -1.0794$ , con frecuencia crítica  $\omega_0 = 0.8724$  entonces elegimos  $\mu = -1$ , para evaluar la estabilidad de la órbita allí existente. La expresión aproximada de la componente  $x_1$  de esta solución periódica, empleando un balance de armónicos de segundo orden (BA2) resulta

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.0380 - 0.2757 \cos(\omega t) \\ &\quad - 0.0048 \cos(2\omega t) - 0.0068 \sin(2\omega t)\end{aligned}$$

donde  $\omega = 0.8666$ . Del mismo modo y siguiendo la metodología en frecuencia [4], pueden hallarse las expresiones aproximadas de cuarto (BA4) y sexto (BA6) orden del ciclo analizado. Con estos resultados, se evalúa la estabilidad del ciclo empleando semidiscretización mediante una aproximación del operador de monodromía. Los resultados que se obtuvieron pueden verse en la TABLA I, donde se contrastaron el multiplicador trivial  $\mu_0$  y el multiplicador de Floquet de mayor módulo entre los restantes,  $\mu_1$ , empleando diferentes órdenes de armónicos y también con el paquete

Dde-Biftool. Los valores hallados confirman que el ciclo es asintóticamente estable y estos mejoran conforme se usa un balance de armónicos de un orden más alto, acercándose cada vez más a los hallados con Dde-Biftool [11]. Este hecho se verifica también con la cercanía del autovalor trivial al valor 1.

TABLA I  
ANÁLISIS DE ESTABILIDAD PARA EL CICLO QUE APARECE EN EL MODELO (16) CON  $\mu = -1$ ,  $(k, \tau) = (0.5, 1)$  VIA SEMIDISCRETIZACIÓN USANDO DIFERENTES BALANCES DE ARMÓNICOS Y CON DDE-BIFTOOL.

Balances	$\theta$	$\omega$	$\mu_0$	$\mu_1$
BA2	0.2757	0.8666	1.0101	0.7881
BA4	0.2721	0.8669	1.0084	0.7951
BA6	0.2718	0.8669	1.0084	0.7955
Dde-Biftool	0.2705	0.8677	1.0000	0.8049

### B. Un ejemplo de Campbell y Leblanc sobre resonancias

Se considera el modelo de resonancia presentado en [15]

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \frac{5}{2}x = Ax(t - \tau) + Bx^2(t - \tau), \quad (18)$$

que puede escribirse como

$$\begin{aligned}x_1' &= -\alpha x_1 - \frac{5}{2}x_2 + Ax_{2\tau} + Bx_{2\tau}^2, \\ x_2' &= x_1,\end{aligned} \quad (19)$$

donde  $\alpha, A, B$  son parámetros  $x_{2\tau} = x_2(t - \tau)$  siendo  $\tau > 0$ . Los equilibrios del sistema resultan con  $x_1 = 0$  y  $x_2$  que debe satisfacer la ecuación:  $-\frac{5}{2}x_2 + Ax_2 + Bx_2^2 = 0$ , de donde  $x_2 = 0$  ( $x = 0$ ) o  $-\frac{5}{2} + A + Bx_2 = 0$ . Consideramos el equilibrio trivial y para que exista un punto de Hopf doble resonante 1:2 está demostrado que debe ser  $\alpha = 0$ ,  $A = -\frac{3}{2}$ ,  $\tau = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Vamos a considerar  $k = 1$  y evaluaremos qué ocurre con la dinámica del punto de equilibrio en estas condiciones, es decir al variar  $A$  y  $\tau$ . Para evaluar la estabilidad de este equilibrio trivial de (19),  $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  se debería analizar la ecuación de primer orden con retardo  $z' = D_0z + D_1z_\tau$ , donde

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & A + 2Bx_{2\tau}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces de acuerdo a cómo resulten las raíces de  $P(\lambda) = \det(\lambda I - D_0 - D_1e^{-\lambda\tau}) = \lambda^2 + \frac{5}{2} - Ae^{-\lambda\tau}$  se puede concluir sobre la estabilidad del equilibrio trivial. Este resultado puede alcanzarse fácilmente mediante la carta de estabilidad del equilibrio en una región apropiada del plano  $\tau - A$ . Esta representación se consigue mediante el método de semidiscretización, determinando las curvas donde el equilibrio cambia su estabilidad y luego comprobando los resultados particulares con un punto arbitrario de cada región resultante. Esto puede observarse en la Fig. 2.

Además, es posible analizar el sistema (19) con la metodología en el dominio frecuencia [4], con el fin de determinar la existencia de soluciones periódicas, producto de una bifurcación de Hopf. En particular, en [16], el sistema (18) se consideró el caso particular  $B = 0.9$  y se describió con bastante minuciosidad la dinámica en torno a este punto de resonancia 1:2 ( $\alpha = 0$ ,  $A = -\frac{3}{2}$ ,  $\tau = \pi$ ) empleando en ese

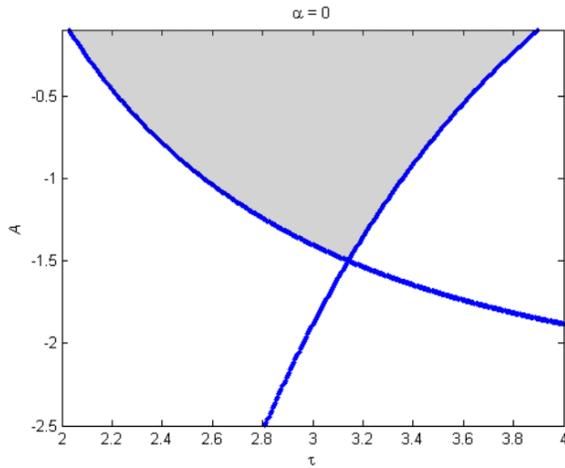


Fig. 2. Carta de estabilidad y continuación de curvas de Hopf para (18) en torno a un punto de Hopf resonante 1:2, que se produce en el equilibrio trivial  $x^*$  cuando se fija  $\alpha = 0$ ,  $\tau = \pi$  y  $A = -\frac{3}{2}$ . La región sombreada corresponde a donde  $x^*$  es asintóticamente estable.

caso, el paquete numérico Dde-Biftool [11], reconociendo allí la existencia de bifurcaciones de ciclos de tipo silla nodo, de doble período y también Neimark-Sacker. Ahora, se van a dar esas mismas determinaciones con la técnica combinada descrita en este trabajo. Con la metodología en el dominio frecuencia, se pueden hallar expresiones aproximadas de estos ciclos emergentes de las curvas de Hopf que atraviesan esta singularidad y con estas fórmulas, se puede determinar su estabilidad, del modo que se describió en el Ejemplo A de esta Sección. Más aún, con este mismo recurso se pueden detectar las bifurcaciones de ciclos (Sección V) y contrastar con los resultados numéricos, como se puede observar en las TABLAS II y III.

TABLA II  
DETERMINACION DE BIFURCACIÓN DE CICLOS DE DOBLE PERÍODO QUE APARECEN EN EL MODELO (18). PUNTO DE HOPF:  $\tau = 3.4$ ,  $A_0 = -0.9151$ ,  $\omega_0 = 1.8480$ .

	$A$	$\mu_0$	$\theta$
BA2	-1.1130	0.9969	1.0385
BA4	-1.1205	1	1.0333
Dde-Biftool	-1.1207	1	1.0549

TABLA III  
DETERMINACION DE BIFURCACIÓN DE CICLOS DE TIPO NEIMARK-SACKER QUE APARECEN EN EL MODELO (18). PUNTO DE HOPF  $\tau = 3.6$ ,  $A_0 = -0.5462$ ,  $\omega_0 = 1.7453$ .

	$A$	$\mu_0$	$\theta$
BA2	-0.9830	0.9845	1.5304
BA4	-1.0325	1.0063	1.5390
Dde-Biftool	-1.0352	1	1.5469

## VII. CONCLUSIONES

En este trabajo, se mostró la potencialidad de la combinación del método en frecuencia y de la técnica de semidiscretización para el estudio de estabilidad y bifurcaciones en ecuaciones retardadas. Este método híbrido es útil tanto para

determinar bifurcaciones tanto locales (de equilibrios) como secundarias (de ciclos). Además, se construyeron cartas de estabilidad y se determinaron bifurcaciones de ciclos diversas. Los resultados obtenidos muestran una excelente concordancia cuando son contrastados con el *software* específico Dde-Biftool. En trabajos futuros, se buscará explotar esta misma combinación de herramientas para analizar modelos que presenten singularidades complejas, o bien ecuaciones con retardos del tipo neutral.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los subsidios de la Universidad Nacional de Río Negro (PI 40/A806), de la Universidad Nacional del Sur (PGI 24/K087) y del CONICET (PIP 11220200102076).

## REFERENCIAS

- [1] Ya. Z. Tsyppkin, "Stability of systems with delayed feedback," *Automat. Telemekh.* **7**, pp. 107-129, 1946 (traducido al inglés en *Frequency Response Methods in Control Systems*, MacFarlane, A. G. J.(Ed.), IEEE Press, pp. 45-56, 1979.
- [2] A. Mees, *Dynamics of Feedback Systems*. John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1981.
- [3] J. L. Muiola and G. R. Chen, *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency-Domain Approach*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [4] F. S. Gentile, J. L. Muiola and G. R. Chen, *Frequency-Domain Approach to Hopf Bifurcation Analysis: Continuous Time-delay Systems*. World Scientific, Singapore, 2019.
- [5] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," *Physics Letters A* **170**(6), pp. 421-428, 1992.
- [6] H. Nakajima, "On analytical properties of delayed feedback control of chaos," *Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics*, **232**(3-4), pp. 207-210, 1997.
- [7] A. Balanov, G. N. B. Janson and E. Schöll, "Delayed feedback control of chaos: Bifurcation analysis," *Physical Review E* **71**, 016222, 2005.
- [8] V. L. Kharitonov, S. I. Niculescu, J. Moreno and W. Michiels, "Static output feedback stabilization: Necessary conditions for multiple delay controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control* **50**(1), pp. 82-86, 2005.
- [9] E. Butcher and B. Mann, "Stability analysis and control of linear periodic delayed systems using Chebyshev and temporal finite element methods," en B. Balachandran et al. (eds), *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*, Springer Series, pp. 93-129, 2009.
- [10] T. Insperger and G. Stépán, *Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications*. Springer Science+Business Media, Applied Mathematical Sciences Vol. 178, 2011.
- [11] K. Engelborghs, T. Luzyanina and G. Samaey, "DDE-BIFTOOL v. 2.00: A Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations," Technical Report 330, Department of Computer Science, K.U. Leuven, Belgium, 2001.
- [12] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel and H. Walther, *Delay Equations*. Springer, Applied Mathematical Sciences Vol. 110, New York, 1995.
- [13] F. Hartung, T. Insperger, G. Stépán and J. Turi, "Approximate stability charts for milling processes using semi-discretization," *Applied Mathematics and Computations* **174**, pp. 51-73, 2006.
- [14] A. Tesi, E. H. Abed, R. Genesio and H. O. Wang, "Harmonic balance analysis of period-doubling bifurcations with implications for control of nonlinear dynamics," *Automatica* **32**, pp. 1255-1271, 1996.
- [15] S. Campbell and V. Leblanc, "Resonant Hopf-Hopf interactions in delay differential equations," *Journal of Dynamical and Differential Equations* **10**(2), pp. 327-345, 1998.
- [16] F. S. Gentile, G. R. Itovich and J. L. Muiola, "Resonant 1:2 double Hopf bifurcation in an oscillator with delayed feedback," *Nonlinear Dynamics* **91** (3), pp. 1779-1789, 2018.