

Coeficientes de curvatura y coeficientes periódicos en la bifurcación de Hopf

Jorge L. Moiola
Depto. de Ing. Eléct. y de Comp.
Universidad Nacional del Sur
Instituto de Investigaciones en
Ing. Eléctrica-IIIIE (UNS-CONICET)
Bahía Blanca, Argentina
Email: jmoiola@uns.edu.ar

Franco S. Gentile
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Instituto de Investigaciones en
Ing. Eléctrica-IIIIE (UNS-CONICET)
Bahía Blanca, Argentina
Email: fsgentile@gmail.com

Griselda R. Itovich
Escuela de Producción, Tecnología
y Medio Ambiente,
Sede Alto Valle y Valle Medio
Universidad Nacional de Río Negro
Villa Regina, Argentina
Email: gitovich@unrn.edu.ar

Abstract—Los coeficientes de curvatura permiten predecir la cantidad de ciclos límites que se desprenden de un punto de equilibrio en una bifurcación de Hopf en sistemas dinámicos no lineales. Sin embargo, los mismos tienen expresiones sumamente complicadas. En este artículo se presenta una fórmula mejorada para el cálculo del segundo coeficiente de curvatura, con respecto a resultados anteriores, utilizando una metodología en el dominio frecuencia. Dicho coeficiente permite tipificar una bifurcación de Hopf degenerada, en la cual el primer coeficiente de curvatura es nulo. Con esta nueva formulación, se estudian dos ejemplos conocidos en la literatura, para los cuales la expresión del segundo coeficiente de curvatura ya ha sido obtenida previamente utilizando otras técnicas. En forma adicional, los desarrollos presentados también permiten obtener los denominados coeficientes periódicos, que indican la variación en la frecuencia de la oscilación que se genera a partir de la bifurcación de Hopf. El cálculo del primero de dichos coeficientes se ilustra en un tercer ejemplo.

Index Terms—Sistemas dinámicos no lineales, ciclos límites, coeficientes de curvatura, coeficientes periódicos, bifurcación de Hopf.

I. INTRODUCCIÓN

La aparición de oscilaciones en sistemas de control con no linealidades suaves se ha estudiado extensamente a partir de los trabajos [1], [2]. El procedimiento utilizado consiste en una expansión en series de Taylor de las funciones no lineales, la aplicación del método de balance de armónicos y el criterio generalizado de estabilidad de Nyquist. Este método se conoce como el teorema de bifurcación de Hopf en el dominio frecuencia. La estabilidad de la oscilación emergente puede obtenerse mediante el signo de una expresión complicada, denominada coeficiente de curvatura. Este coeficiente involucra la contribución multilínea de las diferentes componentes vinculadas con los autovectores de los modos que ocasionan el cambio de estabilidad, esto es, pasar de foco estable a inestable. Con estas mismas herramientas se puede calcular la aproximación (local) de la solución periódica ([2] y [3] hasta 4 armónicos; [4] hasta 6 armónicos). Por último, estas aproximaciones pueden utilizarse para acotar problemas de control de la amplitud de la oscilación [5] o en morigerar la distorsión armónica en osciladores no lineales [6]. Un problema interesante ocurre cuando el primer

coeficiente de estabilidad (también conocido como índice de Bautin) se anula, pues en dicha situación habría que considerar una expansión de alto orden con el método de balance de armónicos [7]. Este problema tiene una larga tradición tanto en matemática pura como en aplicada, y se lo conoce como el problema 16 de Hilbert (enunciado en 1900). Una excelente revisión con las fórmulas de diferentes coeficientes sucesivos fue presentada en [8] mediante el método de Lyapunov-Schmidt. En el presente artículo se perfecciona la expansión propuesta en [2] y [3] para avanzar en el cálculo del segundo coeficiente de estabilidad de Bautin. En este caso, a las aproximaciones dadas en [9] se les incluye una variación en frecuencia de los autovectores. Esta nueva aproximación se computará en ejemplos muy estudiados en la literatura específica, como los dados en [10]–[14]. Como subproducto de esta expansión también se analizará la variación de la frecuencia que tiene incidencia en el denominado fenómeno de isocronismo, pero en este caso utilizando la formulación dada por la teoría de control. Esta temática de los coeficientes de curvatura ha tenido un resurgimiento en los últimos años debido al descubrimiento de los atractores ocultos cuyo origen puede trazarse en oscilaciones inestables y sus interacciones [15].

II. COEFICIENTES DE ESTABILIDAD EN LA EXPANSIÓN DE 4 ARMÓNICOS

La metodología en frecuencia parte de representar un sistema no lineal dado, en forma de lazo realimentado, que consta de una parte lineal con función de transferencia $G(s)$ con una realimentación no lineal [2], [9], como se observa en la Fig. 1. Se considera un sistema autónomo, por lo tanto la entrada externa (que puede representar una referencia o una perturbación) es nula. El objetivo es capturar la presencia de una oscilación suave, de una frecuencia $\hat{\omega}$ dada, causada por una bifurcación de Hopf. Dicha detección comienza representando la solución oscilatoria que se intenta hallar en serie de Fourier, y planteando un balance de armónicos en la entrada y la salida del bloque lineal de la Fig. 1. La bifurcación de Hopf está causada por el cruce de un par de autovalores complejos conjugados de la linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio, a través del eje imaginario, al

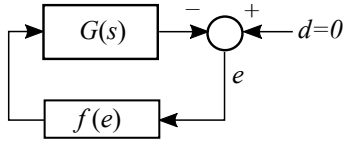


Fig. 1. Estructura del sistema realimentado

variar un único parámetro. Para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, dichos autovalores son de la forma $s = \alpha \pm i\omega$, con $|\hat{\omega} - \omega| \ll 1$. En términos más simples, si en un punto de equilibrio aparece una bifurcación de Hopf, emergerá una solución periódica. Cuando se está “cerca” de la bifurcación, la frecuencia de dicha oscilación es muy cercana a la frecuencia de cruce (la parte imaginaria) de los autovalores de la linealización. Entonces, G admite una representación de Taylor alrededor de $i\hat{\omega}$, de la forma

$$G(i\hat{\omega}) = G(s) + (-\alpha + i\delta\omega)G'(s) + \frac{1}{2}(-\alpha + i\delta\omega)^2 G''(s) + \dots, \quad (1)$$

donde $\delta\omega = \hat{\omega} - \omega$, $G'(s) = dG/ds$, $G''(s) = d^2G/ds^2$, y en forma análoga para las derivadas de órdenes superiores. La fórmula básica de balance de armónicos, que relaciona las componentes frecuenciales en la entrada y la salida del subsistema lineal de la Fig. 1, está dada por

$$E^k = -G(i\hat{\omega}k)F^k,$$

donde E^k y F^k son los coeficientes de Fourier de la solución periódica $\tilde{e}(t)$ y de $f(\tilde{e}(t))$, respectivamente. La ecuación anterior debe resolverse para $k = 0, 1, 2, \dots$, dependiendo de la cantidad de términos que se considere. Se necesita hallar los coeficientes E^k y la frecuencia $\hat{\omega}$ para poder reconstruir la solución. Los coeficientes F^k pueden escribirse en función de los E^k utilizando una expansión de Taylor de f alrededor del equilibrio. En este punto se utiliza una de las ideas más importantes del método en frecuencia, que consiste en expresar todos los armónicos E^k en función de un único parámetro θ , que es una medida de la amplitud de la órbita. Luego de un cierto procedimiento algebraico que puede verse en [2], [9], finalmente se arriba a:

$$[G(i\hat{\omega})J + I] \sum_{j=0}^q V_{1,2j+1} \theta^{2j+1} = -G(i\hat{\omega}) \sum_{j=1}^q W_{1,2j+1} \theta^{2j+1}, \quad (2)$$

donde J representa la matriz Jacobiana de la realimentación no lineal evaluada en el equilibrio y las expresiones de $V_{1,2q+1}$ son los coeficientes líderes de los armónicos y $W_{1,2q+1} = p_q$, $q = 1, 2, \dots$, son los términos que se agrupan en la expansión en serie de Taylor y se conocen en forma explícita [2], [9]. En particular, V_{11} es el autovector derecho de la matriz $G(s)J$ asociado al autovalor -1 . Cabe mencionar que en la bifurcación, un autovalor de la matriz $G(s)J$ asume el valor -1 para cierto $s = i\omega_0$, de acuerdo al criterio generalizado de estabilidad de Nyquist [2].

Reemplazando (1) en (2) y definiendo $z := \alpha - i\delta\omega$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} & [GJ - zG'J + \frac{1}{2}z^2G''J + \dots + I] (V_{11}\theta - zV'_{11}\theta + V_{13}\theta^3 \\ & \quad + V_{15}\theta^5 + \dots - zV'_{13}\theta^3 - zV'_{15}\theta^5 - \dots) \\ & = -[G - zG' + \dots] [W_{13}\theta^3 + W_{15}\theta^5 - zW'_{13}\theta^3 \\ & \quad - zW'_{15}\theta^5 + \dots], \end{aligned} \quad (3)$$

donde se ha omitido el argumento s en G y sus derivadas por simplicidad. Sea u^\top el autovector izquierdo de $G(s)J$ asociado al autovalor -1 , el cual depende de la variable s , y también admite la expansión $u^\top - zu'^\top + \frac{1}{2}z^2u''^\top + \dots$. Multiplicando ambos miembros de (3) a izquierda por la expansión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} & -u^\top G'JzV_{11}\theta + u^\top G'Jz^2V'_{11}\theta - u^\top G'JzV_{13}\theta^3 \\ & + \frac{1}{2}u^\top G''Jz^2V_{11}\theta + u'^\top GJz^2V'_{11}\theta - u'^\top GJzV_{13}\theta^3 \\ & + u'^\top z^2V'_{11}\theta - u'^\top zV_{13}\theta^3 + u'^\top G'Jz^2V_{11}\theta \\ & = -u^\top GW_{13}\theta^3 + u^\top GzW'_{13}\theta^3 - u^\top GW_{15}\theta^5 \\ & \quad + u^\top G'zW_{13}\theta^3 + u'^\top GzW_{13}\theta^3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Dado que θ es pequeño pues la bifurcación de Hopf es un fenómeno local, se puede obtener una primera aproximación de z en función de θ como sigue:

$$z = \alpha - i\delta\omega = \frac{u^\top GW_{13}\theta^2}{u^\top G'JV_{11}} = \gamma_1\theta^2.$$

Por definición, $\sigma_1 = -\text{Re}(\gamma_1)$ es el *primer coeficiente de curvatura*, siendo $\text{Re}(\cdot)$ la parte real de una cantidad compleja. El mismo permite tipificar si una bifurcación de Hopf es supercrítica (si $\sigma_1 < 0$) o subcrítica (si $\sigma_1 > 0$), es decir que brinda información acerca de la dirección y estabilidad del ciclo límite que emerge. Por otra parte, $\beta_1 = \text{Im}(\gamma_1)$, donde Im significa tomar la parte imaginaria de dicho número, se denomina *primer coeficiente periódico*, y permite conocer la variación de la frecuencia de la oscilación, para valores del parámetro cercanos al de bifurcación.

Si se da la condición $\sigma_1 = 0$, entonces, para decidir la naturaleza de la bifurcación, es necesario acudir a la información de los términos de orden θ^5 en (4). Reemplazando la expresión de γ_1 en (4) y agrupando los coeficientes en potencias de θ^5 , se puede escribir

$$\begin{aligned} & \gamma_1^2 u^\top G'JV'_{11} - \gamma_1 u^\top G'JV_{13} + \frac{1}{2}\gamma_1^2 u^\top G''JV_{11} + \gamma_1^2 u'^\top GJV'_{11} \\ & - \gamma_1 u'^\top GJV_{13} + \gamma_1^2 u'^\top V'_{11} - \gamma_1 u'^\top V_{13} + \gamma_1^2 u'^\top G'JV_{11} \\ & = \gamma_1 u^\top GW'_{13} - u^\top GW_{15} + \gamma_1 u^\top G'W_{13} + \gamma_1 u'^\top GW_{13}, \end{aligned}$$

que a su vez, reagrupando según las potencias de γ_1 , se puede ordenar como

$$\begin{aligned} \Phi := & \gamma_1^2 \{ u^\top [G'JV'_{11} + \frac{1}{2}G''JV_{11}] + u'^\top [(GJ + I)V'_{11} \\ & + G'JV_{11}] \} - \gamma_1 \{ u^\top [G'(JV_{13} + W_{13}) + GW'_{13}] \\ & + u'^\top [(GJ + I)V_{13} + GW_{13}] \} + u^\top GW_{15} = 0. \end{aligned}$$

Entonces, se define el *segundo coeficiente de curvatura* como una aproximación mejorada ya que incluye la variación en frecuencia de los autovectores, como

$$\sigma_2 = -\text{Re}(\Phi/\eta), \quad \eta := u^\top G'JV_{11}. \quad (5)$$

Nótese que si $\gamma_1 = 0$ entonces la expresión anterior se reduce a $\sigma_2|_{\gamma_1=0} = -\text{Re}(u^\top GW_{15}/\eta)$. Por otra parte, los cálculos anteriores se reducen notablemente cuando los autovectores de GJ no dependen de s ($u'^\top = V'_{11} = 0$), resultando en

$$\sigma_2 = -\text{Re} \left\{ \frac{u^\top}{\eta} \left[\frac{1}{2} \gamma_1^2 G'' J V_{11} - \gamma_1 G' (J V_{13} + W_{13}) - \gamma_1 G W'_{13} + G W_{15} \right] \right\}, \quad (6)$$

que coincide con los resultados presentados en [9]. El signo de σ_2 indica el tipo de bifurcación de Hopf, ya sea supercrítica ($\sigma_2 < 0$) o subcrítica ($\sigma_2 > 0$) bajo la condición $\sigma_1 = 0$.

III. EJEMPLOS

A. Sistema de Gasull y colaboradores

En primer lugar, se considera el sistema propuesto en [10], dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax^2 + bx^3, \\ \dot{y} &= x + dx^2 + gx^3 + hx^4, \end{cases} \quad (7)$$

siendo a, b, d, g y h parámetros reales. Para su análisis utilizando el método en frecuencia (véase [1], [9]), se elige la realización

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (8)$$

$$f(e) = \begin{bmatrix} -e + ae^2 - be^3 \\ -\frac{1}{2}e + de^2 - ge^3 + he^4 \end{bmatrix},$$

donde, de acuerdo a la elección de C , resulta $e = -x$. Definiendo el vector $X := [x \ y]^\top$, (8) se puede representar como el sistema realimentado

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + Bf(e), \\ e &= -CX. \end{cases} \quad (9)$$

Es sencillo verificar que las matrices $W_C = [B \ AB]$ y $W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ tienen rango completo, por lo cual la realización escogida hace que (9) sea un sistema controlable y observable. Además, aplicando la transformada de Laplace en (9) se llega a un sistema lineal, dado por una función de transferencia $G(s)$ con una realimentación no lineal f , donde

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + s + 1/2} [s \ -1],$$

y de esta forma se consigue la estructura que se muestra en la Fig. 1. Los puntos de equilibrio verifican la ecuación $G(0)f(e) = -e$, de donde se deduce que un punto de equilibrio es $\hat{e} = 0$, y los otros (posibles) son las soluciones de la ecuación $1 - de + ge^2 - he^3 = 0$. En lo que sigue, se analizará la dinámica emergente alrededor de $\hat{e} = 0$. Para ello, se comienza calculando la matriz Jacobiana de f alrededor de dicho equilibrio, es decir,

$$J := \left[\frac{df}{de} \right] \Big|_{\hat{e}=0} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

La estabilidad del equilibrio está determinada por los autovalores de la matriz $G(s)J$, pero como la misma resulta escalar, sólo es necesario considerar la función característica

$$\lambda(s) := G(s)J = -\frac{s - 1/2}{s^2 + s + 1/2}. \quad (10)$$

Como se mencionó en la Sección II, en la bifurcación de Hopf aparecen dos autovalores complejos conjugados sobre el eje imaginario, en la linealización de (8) alrededor del equilibrio. En la formulación como sistema realimentado, esta situación se traduce a $\lambda(i\omega_0) = -1$, que para el caso particular de (10) resulta en la solución $\omega_0 = 1$. Nótese que esta solución es independiente de los parámetros del sistema, es decir, que el sistema (8) se halla en un punto de bifurcación de Hopf, para cualquier combinación de parámetros. Esto se debe a que la variación de dichos parámetros, no modifica los términos lineales en (8). Por otra parte, la función de transferencia de lazo cerrado se define como

$$H(s) = [1 + G(s)J]^{-1} G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} [s \ -1].$$

Como la matriz $G(s)J$ es escalar, sus autovectores derecho e izquierdo son $V_{11} = 1$ y $u = 1$, respectivamente. Por lo tanto, las operaciones de multiplicación con tensores de más abajo se ven muy simplificadas. Además el vector V_{13} es nulo. Las derivadas de alto orden de f resultan

$$D_2 := \left[\frac{d^2 f}{de^2} \right] \Big|_{\hat{e}=0} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2d \end{bmatrix}, \quad D_3 := \left[\frac{d^3 f}{de^3} \right] \Big|_{\hat{e}=0} = \begin{bmatrix} -6b \\ -6g \end{bmatrix},$$

$$D_4 := \left[\frac{d^4 f}{de^4} \right] \Big|_{\hat{e}=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24h \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, se obtienen los vectores que representan las componentes de continua y el segundo armónico como

$$V_{02} = -\frac{1}{4} H(0) D_2 V_{11} \bar{V}_{11} = \frac{d}{2},$$

$$V_{22} = -\frac{1}{4} H(2i) D_2 V_{11} V_{11} = \frac{1}{6} (-d + 2ai),$$

donde $\bar{(\cdot)}$ denota el complejo conjugado. Con esto, y teniendo en cuenta la expresión $p_1 := W_{13} = D_2 (\frac{1}{2} \bar{V}_{11} V_{22} + V_{11} V_{02}) + \frac{1}{8} D_3 \bar{V}_{11} V_{11}^2$, se obtienen

$$G(i)p_1 = \frac{1}{12(-1/2+i)} [9g - 4a^2 - 10d^2 + (6ad - 9b)i],$$

$$\eta := u^\top G'(i) J V_{11} = -\frac{2+i}{(-1/2+i)^2},$$

y luego

$$\gamma_1 = \frac{u^\top G(i)p_1}{\eta} = -\frac{1}{24} [9b - 6ad + (9g - 4a^2 - 10d^2)i]. \quad (11)$$

El primer coeficiente de Lyapunov o primer coeficiente de curvatura, cuyo signo determina la estabilidad del ciclo límite que nace de la bifurcación de Hopf, está dado por $\sigma_1 := -\text{Re}(\gamma_1) = \frac{1}{8}(3b - 2ad)$. Por lo tanto, si se verifica que $2ad = 3b$, el mismo se anula y la información dada por σ_1 no es suficiente para conocer la estabilidad de dicho ciclo. Es importante notar que la parte imaginaria de γ_1 , que se conoce como el coeficiente periódico β_1 , se anula bajo la condición $9g = 4a^2 + 10d^2$. Si $\sigma_1 = 0$, es necesario calcular el segundo coeficiente de curvatura para tipificar la bifurcación de Hopf. Para ello, se calculan en primer lugar los vectores

cuyas expresiones pueden verse en [9] (que resultan escalares en este caso):

$$\begin{aligned} V_{33} &= \frac{1}{96} [2d^2 + 3g - 12a^2 - (10ad + 9b)i], \\ V_{04} &= \frac{1}{72} (19d^3 + 4a^2d - 45dg + 27h), \\ V_{24} &= \frac{1}{288} [114ab - 32a^2d + 14d^3 + 45dg - 48h \\ &\quad + (54ag - 24a^3 - 50ad^2 - 87bd)i]. \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la siguiente expresión

$$\begin{aligned} p_2 := W_{15} &= \frac{D_2}{2} (2V_{11}V_{04} + 2V_{02}V_{13} + \bar{V}_{22}V_{33} + \bar{V}_{11}V_{24} \\ &\quad + \bar{V}_{13}V_{22}) + \frac{D_3}{8} (4V_{11}V_{02}^2 + V_{11}^2\bar{V}_{13} + \bar{V}_{11}^2V_{33} \\ &\quad + 4\bar{V}_{11}V_{02}V_{22} + 2V_{11}V_{22}\bar{V}_{22} + 2V_{11}\bar{V}_{11}V_{13}) \\ &\quad + \frac{D_4}{48} (V_{11}^3\bar{V}_{22} + 6V_{11}^2\bar{V}_{11}V_{02} + 3V_{11}\bar{V}_{11}^2V_{22}) + \frac{D_5}{192} V_{11}^3\bar{V}_{11}^2, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} G(i)p_2 &= \frac{1}{1152(-1/2+i)} [48a^4 - 660d^4 + 204a^2d^2 - 120a^2g \\ &\quad + 396abd + 1908d^2g - 2016dh - 81b^2 + 27g^2 \\ &\quad + (848ad^3 + 32a^3d - 984adg + 288ah \\ &\quad + 336a^2b - 312bd^2 - 108bg)i]. \end{aligned} \quad (12)$$

Nótese que como el autovector V_{11} es constante (no depende de la variable compleja s), resulta $p'_1 := W'_{13} = \frac{dp_1}{ds}|_{s=i\omega_0} = D_2(\frac{1}{2}\bar{V}_{11}V'_{22} + V_{11}V'_{02})$, donde

$$\begin{aligned} V'_{22} &= -\frac{1}{4}H'(2i)D_2V_{11}^2 = -\frac{1}{18}(5a + 4di), \\ V'_{02} &= -\frac{1}{4}H'(0)D_2V_{11}\bar{V}_{11} = -\frac{a}{2}, \end{aligned}$$

con lo cual finalmente se obtiene $p'_1 = -\frac{1}{18}(23a + 4di)[a \quad d]^\top$. Utilizando esta expresión en conjunto con (11)-(12) y teniendo en cuenta que $p_1 = W_{13}$ y $p_2 = W_{15}$, es posible evaluar el segundo coeficiente de curvatura dado por (6). Reemplazando todas las cantidades obtenidas anteriormente, el mismo resulta

$$\sigma_2 = \frac{1}{192} \{4a^3d + 8ad^3 + 16adg + 6a^2b + 18bd^2 - 24ah + 9bg\}.$$

Bajo la condición $\sigma_1 = 0$ ($2ad = 3b$), la expresión anterior se reduce a

$$\sigma_2 = \frac{a}{96} \{d(4a^2 + 10d^2) + 11dg - 12h\},$$

y utilizando también la condición $\text{Im}(\gamma_1) = 0 \iff 4a^2 + 10d^2 = 9g$, finalmente se obtiene $\sigma_2 = \frac{a}{24} \{5dg - 3h\}$, donde $\text{Im}(\cdot)$ denota la parte imaginaria. Suponiendo que $a \neq 0$, la condición para que se anule el segundo coeficiente de curvatura es $5dg - 3h = 0$, idéntico resultado al presentado en [10].

B. Sistema de Kukles

Se estudia la ecuación propuesta en [12], dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \epsilon h(x, y), \end{cases} \quad (13)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ son las variables de estado, $\epsilon, q_{ij} \in \mathbb{R}$ son parámetros del sistema y $h = h(x, y)$ está definida como

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (x^2 + y^2)(-1 + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{02}y^2 \\ &\quad + q_{30}x^3 + q_{03}y^3) \end{aligned} \quad (14)$$

El modelo (13) se puede expresar en forma de sistema realimentado eligiendo las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

y la función no lineal

$$f(e_1, e_2) = -\frac{1}{2}e_1 - e_2 + \epsilon h(-e_1, -e_2),$$

donde $\mathbf{e} = (e_1, e_2) = -(x, y)$. La realización escogida asegura que el sistema realimentado sea controlable, dado que $\det[B \ AB] \neq 0$. Se calcula la función de transferencia para la rama directa como

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + s + 1/2} \begin{bmatrix} -1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Los puntos de equilibrio del sistema realimentado satisfacen la ecuación $G(0)f(\mathbf{e}) = -\mathbf{e}$, y resolviendo la misma, se puede verificar que $\mathbf{e} = 0$ es uno de dichos puntos. En lo que sigue, se analizará la dinámica alrededor de este punto. Para ello, se comienza calculando la matriz Jacobiana alrededor del mismo, dada por

$$J = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{e}} \right|_{\mathbf{e}=\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica del sistema en el dominio de la frecuencia está dada por

$$h(\lambda, s) = \det[\lambda I - G(s)J] = \frac{\lambda^2 + (s - 1/2)\lambda}{s^2 + s + 1/2} = 0,$$

de modo que sus soluciones en la variable λ son $\lambda_1 = 0$ y

$$\lambda_2 = \frac{-s + 1/2}{s^2 + s + 1/2}. \quad (15)$$

El único autovalor que resulta relevante es λ_2 , pues es el único que puede satisfacer la condición de bifurcación de Hopf, es decir, $\lambda_2(i\omega) = -1$. Reemplazando $s = i\omega$ en (15) y planteando dicha condición, resulta que la solución es $\omega_0 = 1$.

En la bifurcación, la componente de frecuencia fundamental de la solución periódica es muy cercana al autovector derecho de la matriz $G(s)J$ (véase [1]). En este ejemplo se plantea $G(s)JV_{11} = \lambda_2(s)V_{11}$, y la solución general es $V_{11}(s) = [1 - s]^\top$. Considerando la frecuencia crítica $\omega = \omega_0 = 1$ y además normalizando dicho autovector, se elige $V_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 - i]^\top$. Para calcular los vectores que representan las componentes de continua y el segundo armónico, se debe hallar en primer lugar la función de transferencia de lazo cerrado, dada por

$$H(s) = [I + G(s)J]^{-1}G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} -1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Entonces, se pueden calcular los componentes a través del cálculo tensorial (\otimes) de los autovectores y vectores asociados

$$\begin{aligned} V_{02} &= -\frac{1}{4}H(0)(D^2g)V_{11} \otimes \bar{V}_{11} = \frac{1}{2}\epsilon \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ V_{22} &= -\frac{1}{4}H(i2\omega)(D^2g)V_{11} \otimes V_{11} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

y con los vectores anteriores, se puede obtener

$$p_1 = W_{13} = \frac{\epsilon^2}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}(-q_{10} + q_{01}i).$$

Con las expresiones anteriores, y además calculando el autovector izquierdo de $G(s)J$, dado por $u^\top = [1 \ 2]$, se puede obtener el coeficiente

$$\gamma_1 = \frac{u^\top G(i\omega)p_1}{u^\top G'(i\omega)JV_{11}} = -\frac{1}{4}\epsilon q_{01} + i\left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon}{4}q_{10}\right), \quad (16)$$

cuya parte real es, por definición, el primer coeficiente de curvatura $\sigma_1 = -\text{Re}(\gamma_1) = \frac{1}{4}\epsilon q_{01}$. Por lo tanto, si $\epsilon \neq 0$ y $q_{01} \neq 0$, la bifurcación de Hopf puede tipificarse a través del signo de σ_1 . En caso contrario, el origen será un centro, y se necesitará información basada en términos de mayor orden para decidir el tipo de bifurcación.

En lo que sigue, se computan los coeficientes involucrados en el balance armónico de cuarto orden, que permiten calcular el segundo coeficiente de curvatura. Los mismos están dados por

$$\begin{aligned} V_{04} &= \frac{1}{4}[-\epsilon^3 + 2\epsilon^2 q_{10} + \frac{\epsilon}{2}(q_{20} + q_{02})] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ V_{24} &= \frac{1}{12}[\epsilon^2(q_{10} - q_{01}i) + \frac{\epsilon}{2}(q_{20} - q_{02})] \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}, \\ V_{44} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando los coeficientes anteriores, se obtiene

$$p_2 = W_{15} = \frac{\epsilon}{16\sqrt{2}}[8\epsilon^3 - 24\epsilon^2 q_{10} - 16\epsilon q_{20} - 8\epsilon q_{02} + 3(-q_{30} + q_{03}i)].$$

El denominado segundo coeficiente de curvatura está dado por (5). Nótese que, para el ejemplo estudiado, se tiene

$$u'^\top = [0 \ 0], \quad V_{11}'^\top = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

por lo tanto sólo es necesario calcular los siguientes términos

$$u^\top G W_{13}' = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}[\epsilon i + \frac{1}{2}(3q_{01} - q_{10}i)],$$

$$u^\top G' W_{13} = -\frac{8}{5}(2 - i)W_{13}$$

$$u^\top G' J V_{11}' = -\frac{8(2-i)}{5\sqrt{2}}$$

$$u^\top G'' J V_{11} = \frac{2(11+12i)}{5\sqrt{2}}.$$

Por otra parte, llamando $\alpha := \text{Re}(\gamma_1)$ y $\beta := \text{Im}(\gamma_1)$ en (16), se verifican las relaciones

$$W_{13} = \sqrt{2}(\beta - \alpha i), \quad W_{13}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3\alpha + \beta i).$$

Continuando con los cálculos para obtener σ_2 dado por (5), se tiene

$$-\frac{\gamma_1 u^\top}{\eta}(G' W_{13} + G W_{13}') = \frac{2\gamma_1}{5\sqrt{2}\eta}[-16\alpha i + 16\beta + 7\alpha - 13\beta i] \quad (17a)$$

$$\frac{\gamma_1^2 u^\top}{\eta}(G' J V_{11}' + \frac{1}{2}G'' J V_{11}) = \frac{\gamma_1^2(6+32i)}{5\sqrt{2}\eta} \quad (17b)$$

Finalmente, reemplazando la suma de los términos (17a) y (17b) en (5) y dado que $\eta = -4i/\sqrt{2}$, se obtiene

$$\sigma_2 = \frac{3\epsilon}{32}q_{03}.$$

Para ilustrar los resultados obtenidos, es conveniente considerar una pequeña perturbación del sistema (13), de modo tal que la parte real de los autovalores de la linealización no sea exactamente cero, para poder observar la oscilación causada por la bifurcación de Hopf. Para ello, sea el sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = x + ay + \epsilon h(x, y), \end{cases} \quad (18)$$

donde h está dada por (14) y se tomará un valor pequeño de a . Como ejemplo particular, se puede considerar $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$. Para ello, se fijan los siguientes valores de los parámetros: $a = -0.1$, $\epsilon = 0.5$, $q_{10} = 1$, $q_{01} = 0.5$, $q_{20} = 0$, $q_{02} = 0$, $q_{30} = 0$ y $q_{03} = -0.1$. La Fig. 2 muestra simulaciones numéricas del sistema (18) con este conjunto de parámetros y tres condiciones iniciales diferentes: $(x_0, y_0) = (1.2, 0.01)$ (trazo azul), $(x_0, y_0) = (1.3, 0.01)$ (trazo verde) y $(x_0, y_0) = (-1.1, 0.01)$ (trazo amarillo). Puede deducirse que existe un ciclo límite inestable rodeando al equilibrio, y uno estable de mayor amplitud rodeando al primero (hacia el cual convergen las trayectorias verde y amarilla). Además debe notarse que estas oscilaciones coexisten con el punto de equilibrio cuando el mismo es estable. Un punto de gran

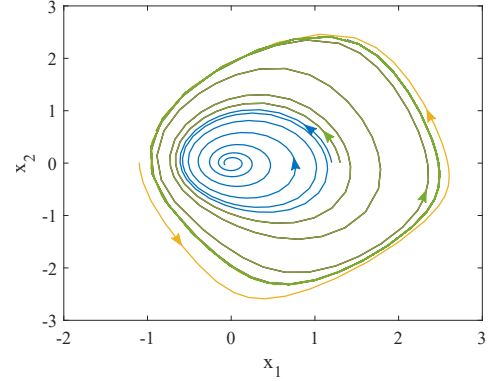


Fig. 2. Algunas trayectorias en el plano de fase con $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < 0$, con el punto de equilibrio estable.

importancia para un sistema en un entorno de una bifurcación de Hopf donde se anula el primer coeficiente de curvatura, es que el escenario dinámico puede cambiar drásticamente ante pequeñas variaciones de los parámetros. Por ejemplo, en la Fig. 3 se muestran simulaciones numéricas, donde se han considerado los mismos valores de los parámetros que en la Fig. 2, a excepción de q_{01} , que ahora se considera nulo. Con diferentes condiciones iniciales, puede verse que para $a < 0$ ya no existen ciclos límites, y el único atractor es el punto de equilibrio. Por el contrario, para $a > 0$, vuelve a observarse el ciclo estable, que tiene una amplitud considerable a pesar de que el valor de a es relativamente pequeño.

C. Sistema de Kukles reducido

Se analizará el sistema propuesto en [13], el cual resulta un caso con una no linealidad más simple, con respecto al

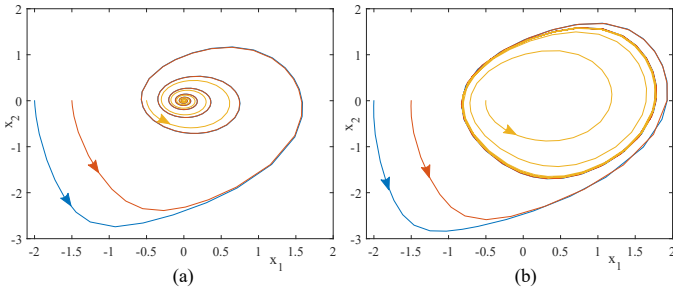


Fig. 3. Algunas trayectorias en el plano de fase con $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 < 0$, para (a) $a = -0.1$ y (b) $a = 0.1$.

ejemplo de la sección anterior. El mismo está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2, \end{cases} \quad (19)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ son las variables de estado y $a_i \in \mathbb{R}$ son parámetros del sistema. El modelo (19) se puede expresar en forma de sistema realimentado eligiendo las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

y la función no lineal

$$f(\mathbf{e}) = -\frac{1}{2}e_1 - e_2 + a_1e_1^2 + a_2e_1e_2 + a_3e_2^2 - a_4e_1^3 - a_5e_1^2e_2 - a_6e_1e_2^2,$$

donde $\mathbf{e} = (e_1, e_2) = -(x, y)$. La función transferencia $G(s)$ resulta idéntica que en el ejemplo anterior, y nuevamente $\mathbf{e} = 0$ es un punto de equilibrio del sistema. En lo que sigue, se analizará la dinámica alrededor de este punto. Como también la matriz Jacobiano coincide con la del último ejemplo, resulta en la función característica (15) y por lo tanto la misma solución de Hopf, es decir, $\omega_0 = 1$.

Tenemos, además, $V_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 - i]^\top$ y

$$H(s) = [I + G(s)J]^{-1} G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} -1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Entonces, se pueden obtener los vectores

$$V_{02} = \frac{1}{4}H(0)(D^2g)V_{11} \otimes \bar{V}_{11} = \frac{a_1+a_3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{22} = \frac{1}{4}H(i2\omega)(D^2g)V_{11} \otimes V_{11} = \frac{a_1-a_3-a_2i}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix},$$

y con ellos, calcular

$$p_1 = W_{13} = \frac{1}{48\sqrt{2}} [(-4a_1 + 2a_2i - 8a_3)(a_1 - a_3 - a_2i) + (24a_1 - 12a_2i)(a_1 + a_3) - 18a_4 - 6a_6 + 6a_5i].$$

Con las expresiones anteriores, se puede obtener $\gamma_1 = u^\top G(i\omega)p_1/u^\top G'(i\omega)JV_{11} = \sigma_1 + i\beta_1$ donde el primer coeficiente de curvatura es

$$\sigma_1 = \frac{1}{16} [a_2(a_1 + a_3) - a_5],$$

y el primer coeficiente periódico resulta

$$\beta_1 = 2(a_2^2 + 10a_1^2 + 10a_1a_3 + 4a_3^2 - 9a_4 - 3a_6).$$

Estos resultados coinciden con el presentado en [13] para el coeficiente periódico y adaptándolo convenientemente a la notación dada en [14] al coeficiente de curvatura.

IV. CONCLUSIONES

En el presente artículo se mostró el desarrollo de un cómputo más preciso y general del segundo coeficiente de estabilidad para la bifurcación de Hopf, mejorando las fórmulas conocidas, que emplean la metodología en el dominio frecuencia. Como un resultado adicional se calculó el primer coeficiente periódico, vinculándolo con una larga tradición en matemática del problema de isocronismo. En los ejemplos estudiados se calcularon todos los vectores auxiliares con dicha metodología, verificando los resultados de otros autores independientes. Los resultados obtenidos dan lugar a distintas aplicaciones, como la detección de configuraciones de múltiples órbitas periódicas y de la variabilidad o no del período de la oscilación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los subsidios de la Universidad Nacional de Río Negro (PI 40A806) y de la Universidad Nacional del Sur (PGI 24/K087). Además, agradecen las sugerencias de los revisores anónimos.

REFERENCES

- [1] A. I. Mees and L. O. Chua, "The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems", *IEEE Trans. on Circuits and Systems* 4, pp. 235-254 (1979).
- [2] A. I. Mees, *Dynamics of feedback systems*, John Wiley and Sons, Chichester, UK (1981).
- [3] A. I. Mees and D. J. Allwright, "Using characteristic loci in the Hopf bifurcation", *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers (IET)* 126, pp. 628-632 (1979).
- [4] J. L. Moiola and G. R. Chen, "Computations of limit cycles via higher-order harmonic balance approximation", *IEEE Trans. on Automatic Control* 38, pp. 782-790 (1993).
- [5] D. W. Berns, J. L. Moiola and G. R. Chen, "Feedback control of limit cycle amplitudes from a frequency domain approach", *Automatica* 34, pp. 1567-1573 (1998).
- [6] F. I. Robbio, E. E. Paolini and J. L. Moiola, "Harmonic distortion analyses based on Hopf bifurcation theorem and fast Fourier transform", *Intnl. Journal of Bifurcation and Chaos* 17, pp. 1623-1635 (2007).
- [7] G. L. Calandrini, E. E. Paolini, J. L. Moiola and G. R. Chen, "Controlling limit cycles and bifurcations", en *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, Editor: G. R. Chen, CRC Press, Boca Raton, USA, Capítulo 10, pp. 205-232 (1999).
- [8] W. W. Farr, C.Z. Li, I.S. Labouriau and W.F. Langford "Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert's 16th problem", *SIAM J. Math. Anal.* 20, pp. 13-30 (1989).
- [9] J. L. Moiola and G. R. Chen, *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency-Domain Approach*, World Scientific, Singapore (1996).
- [10] A. Gasull, A. Guillamon and V. Mañosa "An explicit expression of the first Lyapunov and period constants with applications", *Journal of Math. Analysis and Appls.* 211, pp. 190-212 (1997).
- [11] A. Algaba, E. Freire and E. Gamero "Isochronicity via normal form", *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 1, pp. 133-156 (2000).
- [12] E. Sáez and I. Szántó "Bifurcations of limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse", *Applied Mathematics Letters*, 25, pp. 1695-1700 (2012).
- [13] C. Rosseau, and B. Toni, "Local bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system", *Can. J. Math.*, 49(2), pp. 338-358 (1997).
- [14] N. G. Lloyd and J. M. Pearson, "Computing centre conditions for certain cubic systems", *J. Comput. Appl. Math.*, 40, pp. 323-336 (1992).
- [15] D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov and A. Prasad, "Hidden attractors in dynamical systems," *Physics Reports*, 637, pp. 1-50 (2016).